

Единый государственный экзамен по математике: анализ и использование результатов в практической деятельности учителя

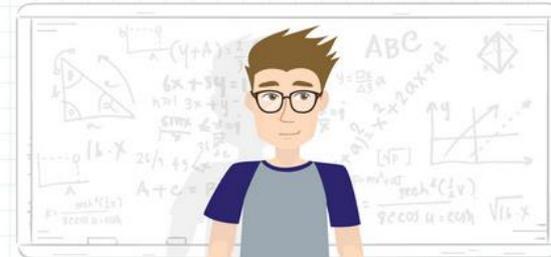
Содержание экзамена

Экзамен охватывает практически весь объем учебного материала



**ЕГЭ
ПО МАТЕМАТИКЕ**

www.ege.edu.ru



Уровень

БАЗОВЫЙ

Продолжительность
3 часа

Работа оценивается
по 5-балльной шкале

Минимальный порог
3 балла

Уровень

ПРОФИЛЬНЫЙ

Продолжительность
3 часа 55 минут

Работа оценивается
по 100-балльной шкале

Минимальный порог
27 баллов

**! Можно выбрать для сдачи только один уровень ЕГЭ по математике!
При пересдаче уровень можно изменить.**

ПЕРЕСДАЧА

если не набран минимальный пороговый балл

в резервные дни
(при наличии положительного результата
ЕГЭ по русскому языку)

**в дополнительный
период в сентябре**



www.obrnadzor.gov.ru

У ВАС ВСЕ ПОЛУЧИТСЯ!

ЕГЭ – 2020, математика (профиль)

Экзаменационная работа включает в себя 19 заданий.

На выполнение работы отводится 3 часа 55 минут.

Правильное решение каждого из заданий 1–12 оценивается 1 баллом.

Задание считается выполненным верно, если экзаменуемый дал правильный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Решения заданий с развернутым ответом оцениваются от 0 до 4 баллов.

Полное правильное решение каждого из заданий оценивается:

13, 14 и 15 – 2 баллами;

16 и 17 – 3 баллами;

18 и 19 – 4 баллами.

Проверка выполнения заданий 13 – 19 проводится экспертами на основе разработанной системы критериев оценивания.

Максимальный первичный балл за всю работу – 32.

При выполнении заданий разрешается пользоваться линейкой.

ЕГЭ – 2020, математика (база)

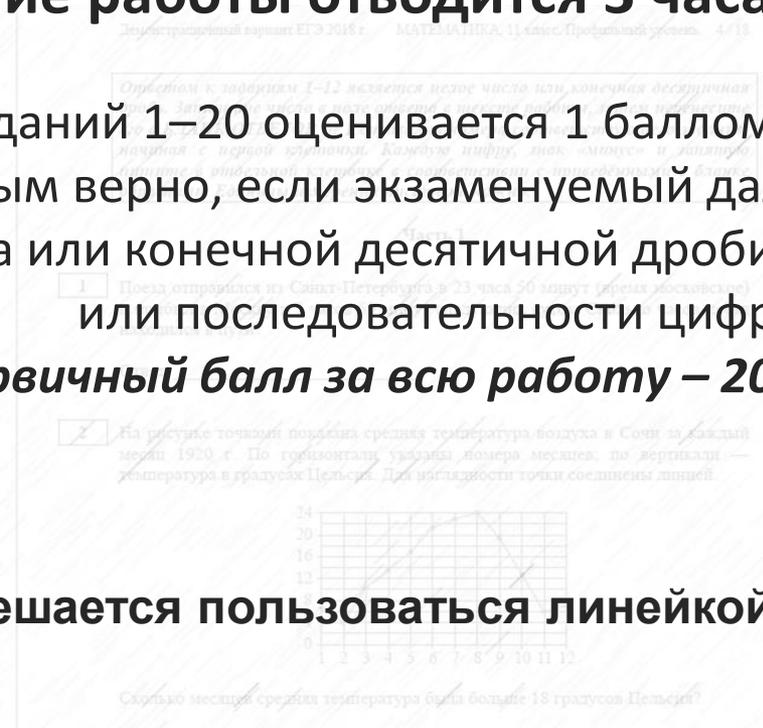
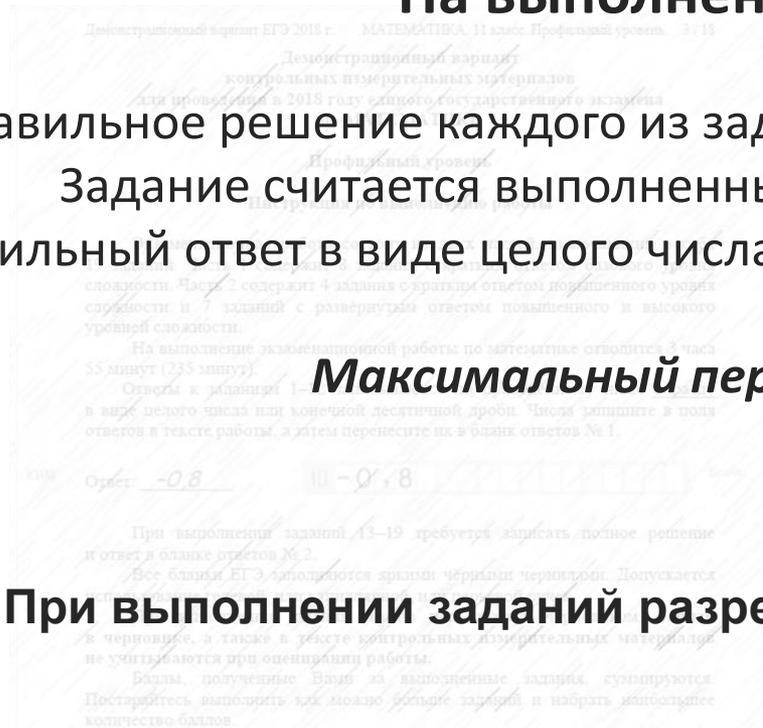
**Экзаменационная работа включает в себя 20 заданий.
На выполнение работы отводится 3 часа.**

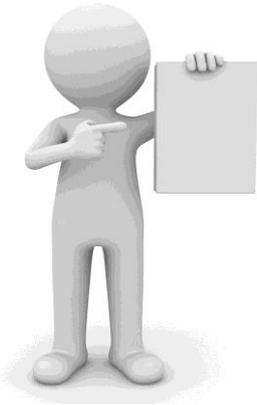
Правильное решение каждого из заданий 1–20 оценивается 1 баллом.

Задание считается выполненным верно, если экзаменуемый дал правильный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби, или последовательности цифр.

Максимальный первичный балл за всю работу – 20.

При выполнении заданий разрешается пользоваться линейкой.





Что оценивается на экзамене?

Оцениваются фактические знания и умение рассуждать, решать.

«УТВЕРЖДАЮ»
 Директор
 ФГБНУ «Федеральный институт педагогических измерений»
 О.А. Решетникова
 «06.02.2018» 2017 г.

«СОГЛАСОВАНО»
 Проректор
 Научно-методического центра
 ФГБНУ «ФИПИ» по математике
 А.Л. Семенов
 «06.02.2018» 2017 г.

Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Демонстрационный вариант контрольных измерительных материалов единого государственного экзамена 2018 года по математике

Профильный уровень

подготовлен Федеральным государственным бюджетным научным учреждением
 «ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ»

Демонстрационный вариант ЕГЭ 2018 г. МАТЕМАТИКА. 11 класс. Профильный уровень. 2 / 18

«УТВЕРЖДАЮ»
 Директор
 ФГБНУ «Федеральный институт педагогических измерений»
 О.А. Решетникова
 «06.02.2018» 2017 г.

«СОГЛАСОВАНО»
 Проректор
 Научно-методического центра
 ФГБНУ «ФИПИ» по математике
 А.Л. Семенов
 «06.02.2018» 2017 г.

Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Демонстрационный вариант контрольных измерительных материалов единого государственного экзамена 2018 года по математике

Базовый уровень

подготовлен Федеральным государственным бюджетным научным учреждением
 «ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ»

Единый государственный экзамен МАТЕМАТИКА. Базовый уровень 1/2

Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ
 Базовый уровень

Справочные материалы

Алгебра

Таблица квадратов целых чисел от 0 до 99

Десятки	Единицы									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

Свойства арифметического квадратного корня
 $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ при $a \geq 0, b \geq 0$
 $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ при $a \geq 0, b > 0$

Корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$
 $x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ при $b^2 - 4ac > 0$
 $x = -\frac{b}{2a}$ при $b^2 - 4ac = 0$

Формулы сокращенного умножения
 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
 $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
 $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

© 2018 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
 Копирование не допускается

Степень и логарифм

Свойства степени при $a > 0, b > 0$
 $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
 $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
 $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
 $(ab)^n = a^n \cdot b^n$
 $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Свойства логарифма при $a > 0, a \neq 1, b > 0, x > 0, y > 0$
 $a^{\log_a b} = b$
 $\log_a a = 1$
 $\log_a 1 = 0$
 $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$
 $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
 $\log_a b^k = k \log_a b$

Геометрия

Средняя линия треугольника и трапеции

$MN \parallel BC$
 $MN = \frac{BC}{2}$

$MN \parallel BC \parallel AD$
 $MN = \frac{BC + AD}{2}$

Теорема Пифагора

$a^2 + b^2 = c^2$

Длина окружности
 Площадь круга

$C = 2\pi r$
 $S = \pi r^2$

Описанная и вписанная окружности правильного треугольника

$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$
 $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
 $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$
 $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

В ЕГЭ по математике присутствуют как задания, в которых условие уже сформулировано в обычном виде «математической задачи», так и задания на применение математики в реальной жизни, смежных областях.

12 Для обслуживания международного семинара необходимо собрать группу переводчиков. Сведения о кандидатах представлены в таблице.

Номер переводчика	Язык	Стоимость услуг (руб. в день)
1	Немецкий, испанский	7000
2	Английский, немецкий	6000
3	Английский	3000
4	Английский, французский	6000
5	Французский	2000
6	Испанский	4000

Пользуясь таблицей, соберите хотя бы одну группу, в которой переводчики вместе владеют четырьмя иностранными языками: английским, немецким, французским и испанским, а суммарная стоимость 12 000 рублей в день.

В ответе укажите какой-нибудь один набор без пробелов, запятых и других дополнительных св

7 Найдите корень уравнения $3^{x-3} = 81$.

9 Найдите $\sin 2\alpha$, если $\cos \alpha = 0,6$ и $\pi < \alpha < 2\pi$.

17 15 января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата таковы:
 — 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r — целое число;
 — со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
 — 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

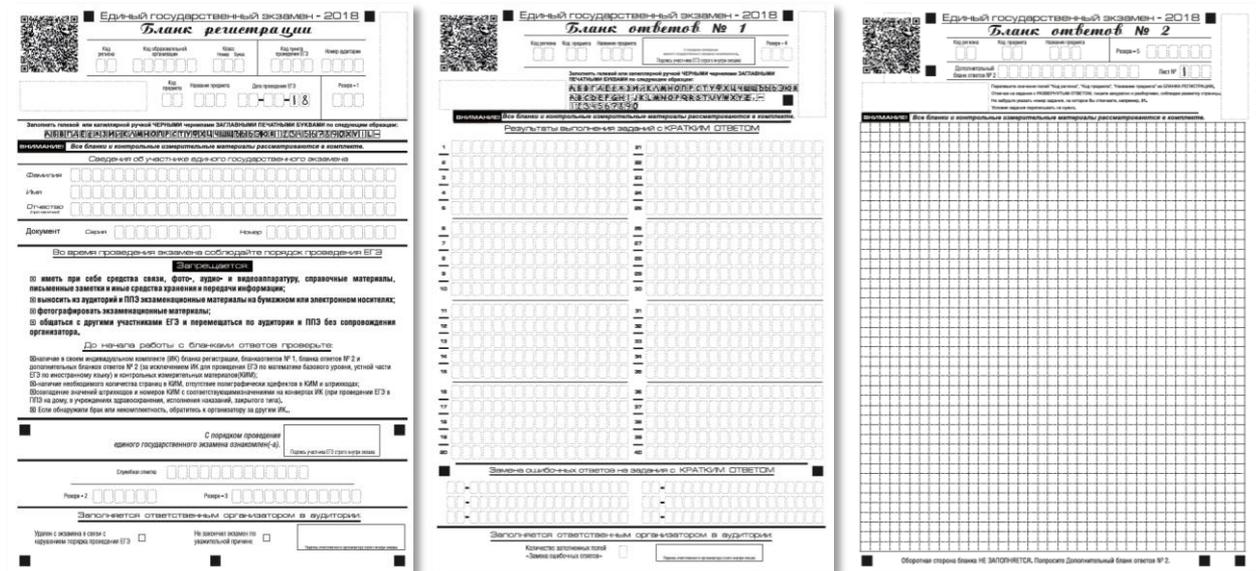
Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн рублей)	1,0	0,6	0,4	0,3	0,2	0,1	0

Найдите наибольшее значение r , при котором общая сумма выплат будет меньше 1,2 млн рублей.

Изменений в структуре и содержания КИМ ЕГЭ в 2020 году нет

Как происходит фиксация результатов?

Результаты выполнения заданий необходимо перенести на специальный бланк регистрации ответов



Особое внимание на экзамене следует уделить **правильному планированию времени** при выполнении заданий.

Главное условие успешной сдачи ГИА - это разработка индивидуальной стратегии деятельности при подготовке и во время экзамена.

Как готовиться к экзамену?

1. Определите свой уровень и **ЦЕЛЬ** сдачи экзамена. Исходя из этого, выработайте индивидуальную стратегию подготовки.
2. Главная задача – сдать на тот балл, на который Вы **МОЖЕТЕ** сдать.
3. Закрепляйте технику решения тех задач, которые у Вас **ПОЛУЧАЮТСЯ**.
4. Очень важно **ПРАВИЛЬНО** спланировать свое время на экзамене.

Обратите внимание!

При решении задач с кратким ответом типичной ошибкой является неверное распределение времени.

НЕЛЬЗЯ ЭКОНОМИТЬ ВРЕМЯ НА:

- прочтении условия задания;
- записи решения задачи на черновике;
- подробной записи вычислений.

СЛЕДСТВИЕМ ЯВЛЯЮТСЯ:

- вычислительные ошибки;
- ответ не на тот вопрос, который поставлен в условии.

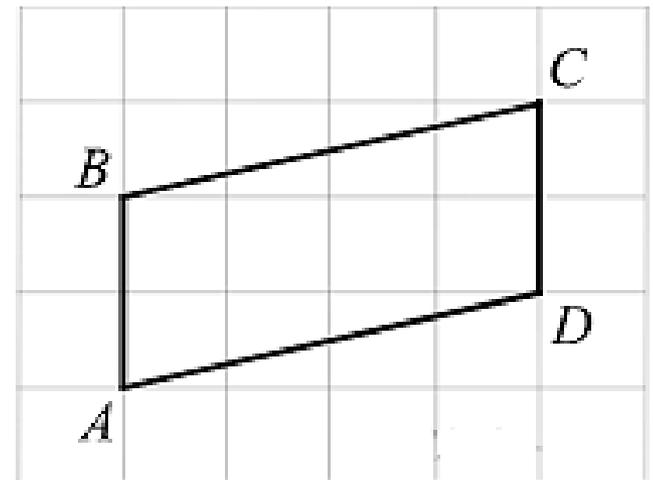


Неверное прочтение условия задачи ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ ЭКЗАМЕНА

Распространенная ошибка – ответ не на тот вопрос

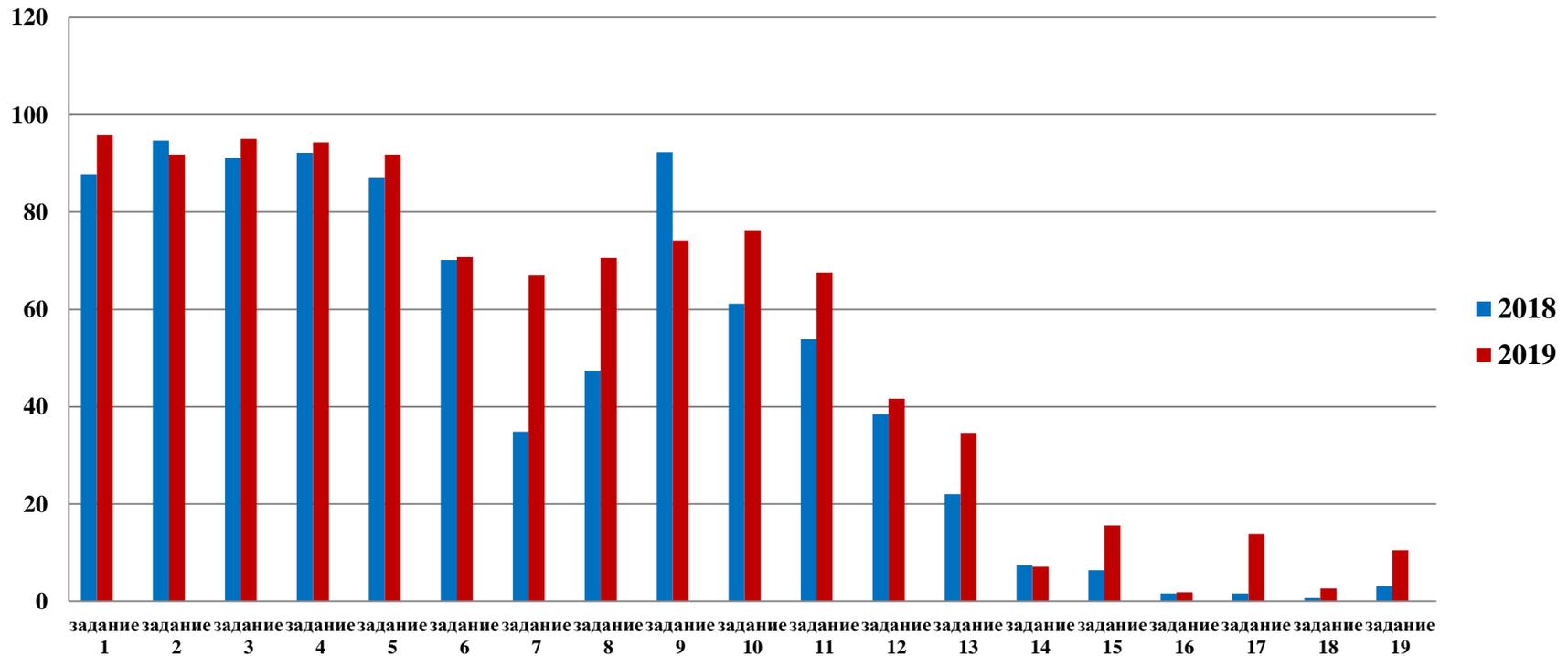
Задание 3

На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён параллелограмм. Найдите длину его большей высоты.



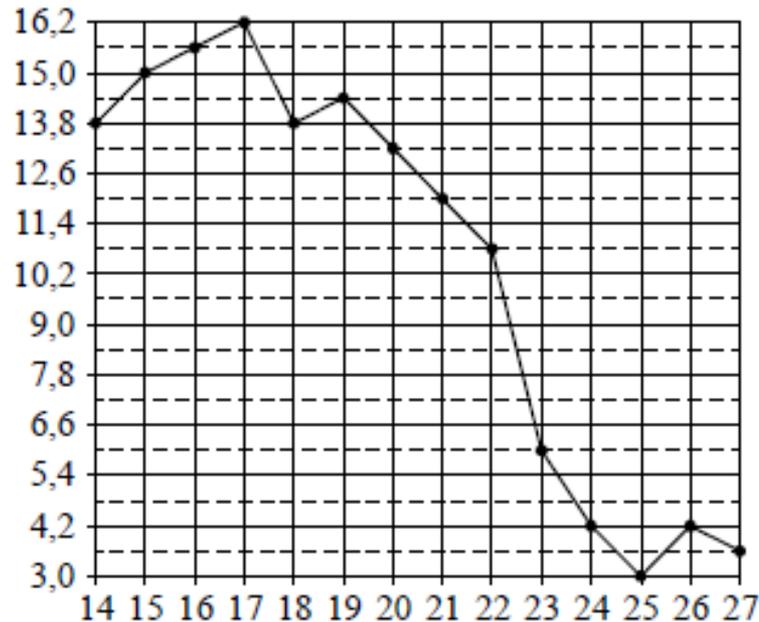
Анализ заданий и типичных ошибок, допускаемых обучающимися при выполнении заданий ЕГЭ

Сравнительная диаграмма результатов выполнения ЕГЭ (профильный) по заданиям в 2018 и 2019 годах



2

На рисунке жирными точками показана среднесуточная температура воздуха в Ижевске с 14 по 27 сентября 1980 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа из данного периода среднесуточная температура в Ижевске была наибольшей.

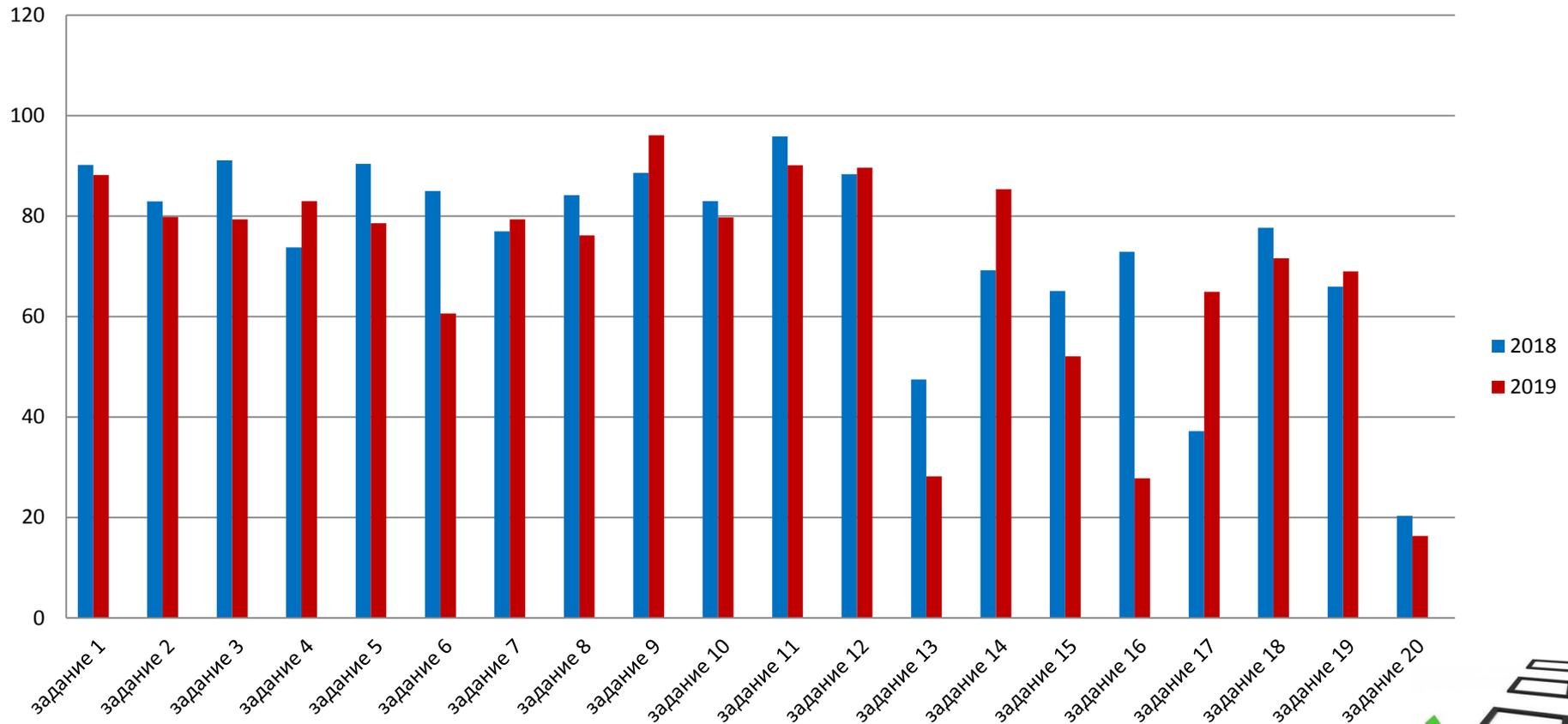


12

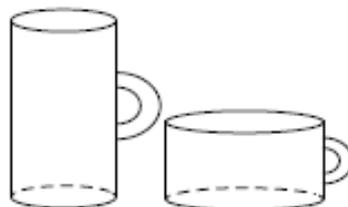
Найдите точку минимума функции $y = x\sqrt{x} - 3x + 17$.



Сравнительная диаграмма результатов выполнения ЕГЭ (базовый) по заданиям в 2018 и 2019 годах



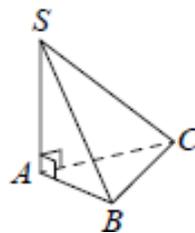
- 13 Даны две кружки цилиндрической формы. Первая кружка в полтора раза выше второй, а вторая вдвое шире первой. Во сколько раз объём первой кружки меньше объёма второй?



- 15 В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AB=13$, $\sin A = \frac{12}{13}$.
Найдите длину стороны AC .



- 16 В основании пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной 6 , а боковое ребро SA перпендикулярно основанию и равно $4\sqrt{3}$. Найдите объём пирамиды $SABC$.



Ответ:

- 20 Маша и Медведь съели 160 печений и банку варенья, начав и закончив одновременно. Сначала Маша ела варенье, а Медведь — печенье, но в какой-то момент они поменялись. Медведь и то и другое ест в три раза быстрее Маши. Сколько печений съел Медведь, если варенья они съели поровну?



Обратите внимание!

- После прочтения условия задачи нужно записать решение на черновике, все вычисления должны быть записаны аккуратно.
- Проверьте правильность полученного ответа, особо обратив внимание на вопрос задачи.
- Не нужно экономить время на записи решения и проверке полученного ответа.



«Прежде, чем думать о решении будущих задач, научитесь справляться с сегодняшними за наименьшее время и с большей эффективностью.»

Друкер Питер

Семь важных ориентиров участнику ЕГЭ

1. В любом списке, состоящем из более чем одной задачи, обязательно найдется та, которая для решающего проще, чем все остальные.
2. Необходимо понимать, зачем Вы решаете задачи второй части варианта.
3. «Запас прочности» – задачи, которые можно узнать по их постановке и методу решения.
4. В любой задаче есть значимый промежуточный результат.
5. Время нужно не экономить, а правильно распределить.
6. Лаконичность и полнота решения – гаранты понимания проверяющим приведенного решения задачи, даже, если оно нестандартное.
7. Поверьте, дан ли Вами ответ именно на поставленный в задаче вопрос.



Возможный вариант стратегии на «СРЕДНИЙ РЕЗУЛЬТАТ»

1. Задание 13 на решение уравнения.
2. Задание 15 на решение неравенства.
3. Задание 19 на числовые зависимости с получением промежуточного результата.
4. Задание 16 – планиметрическая задача с использованием недоказанного пункта.



«Запоминать умеет тот, кто умеет быть внимательным.»

Джонсон С.

Лаконичность и полнота решения – гаранты понимания проверяющим приведенного решения задачи, даже, если оно нестандартное.



Какие качества мешают школьнику научиться решать задачи по математике?

- неумение работать с текстом;
- невнимательность;
- боязнь получить неправильный ответ;
- нежелание признавать свои ошибки;
- привычка действовать по шаблону;
- неумение проверить себя в процессе решения задачи.



Задание 1 (профиль)

Задание 3, 6 (база)

**Проверяемые
требования
(умения)/тип задач**

Уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни.

Округление величин с избытком и недостатком, проценты.

Типичные ошибки

С этими заданиями справились почти все учащиеся. Задачи соответствуют программе 5 -6 классов.

Типичные ошибки связаны, в первую очередь, с неумением читать условие задачи, понимать логику задачи.

Допускаются также арифметические ошибки.

**Рекомендации по
выполнению
задания 1**

Среди заданий этого типа наиболее часто встречаются задания двух видов.

– В заданиях вида «*Сколько карандашей по цене 2 руб. можно купить на 5 рублей?*» ответ 2 карандаша — округляем до ближайшего меньшего целого, т. к. половину карандаша купить невозможно.

– В заданиях вида «*Сколько двухлитровых банок потребуется, чтобы в них поместилось 5 литров воды?*» ответ 3 банки — округляем до ближайшего большего целого, т. к. вся вода должна поместиться.

Важно не путать эти два случая, округляя в ту или иную сторону.

Цена клубники на рынке 160 рублей, а в супермаркете – 200 рублей.

- На сколько процентов цена клубники в супермаркете больше цены клубники на рынке?
- На сколько процентов цена клубники на рынке меньше цены клубники в супермаркете?

**За 100% всегда принимаем то,
с чем сравниваем.**



Задание 2 (профиль)

Задание 11 (база)

**Проверяемые
требования
(умения)/тип задач**

Уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни.
Анализ графических зависимостей.

Типичные ошибки

С этими заданиями справились почти все учащиеся. Задачи соответствуют программе 5 -6 классов.

Типичные ошибки связаны с тем, что часть участников не замечают в условии ограничения по времени, что свидетельствует скорее о случайных ошибках в чтении условия задачи, и в чтении диаграммы.

**Рекомендации по
выполнению
задания 2**

Для того чтобы найти по графику множество значений функции достаточно найти проекцию ее графика на ось ординат. Множество ординат всех точек проекции и есть область значений функции.

Для того чтобы найти по графику наибольшее значение функции на некотором промежутке достаточно найти наибольшую ординату среди всех точек проекции соответствующей части графика на ось ординат.

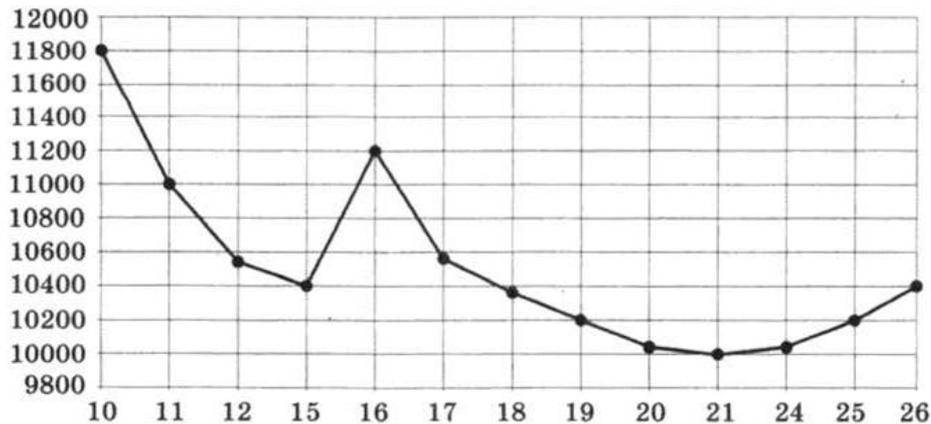
Для того чтобы найти по графику наименьшее значение функции на некотором промежутке достаточно найти наименьшую ординату среди всех точек проекции соответствующей части графика на ось ординат.

Аналогичным образом рассуждают, если требуется определить значение величин по данным диаграммы.

На рисунке жирными точками показан курс евро, установленный Центробанком РФ, во все рабочие дни с 1 по 28 сентября 2001 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена евро в рублях. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линиями. Определите по рисунку наибольший курс евро в рублях в период с 19 по 26 сентября.



На рисунке жирными точками показана цена никеля на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 10 по 26 ноября 2008 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена тонны никеля в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наибольшую цену никеля на момент закрытия торгов в период с 11 по 21 ноября (в долларах США за тонну).



Задание 3 (профиль)

Задание 8 (база)

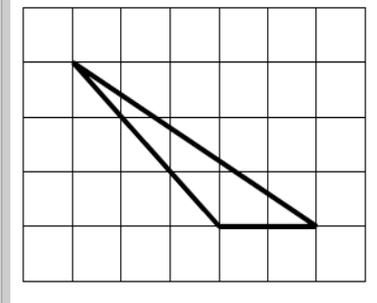
**Проверяемые
требования
(умения)/тип задач**

Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами.

Планиметрические задачи.

Типичные ошибки

Например, при нахождении площади треугольника, типичные ошибки связаны с нахождением участниками длин стороны и высоты треугольника, а также в применении формулы площади треугольника.

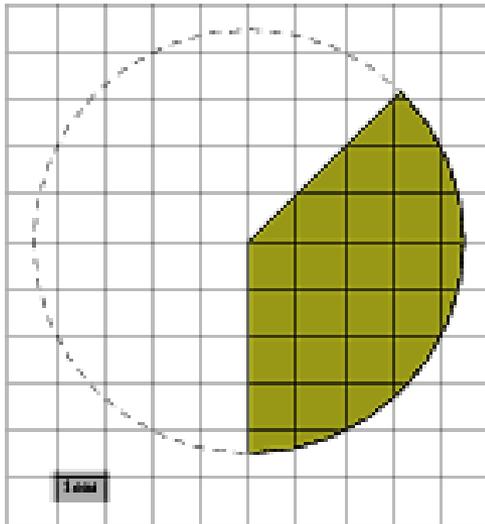


**Рекомендации по
выполнению
задания 3**

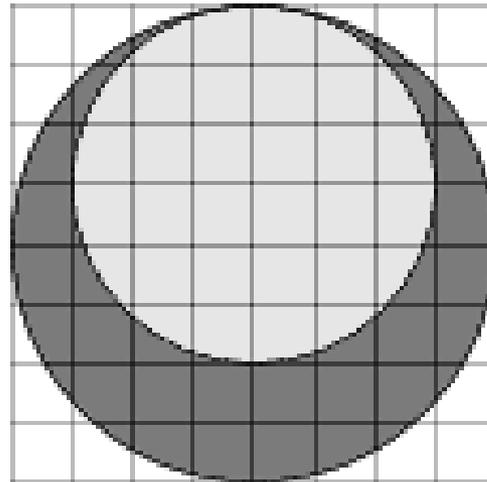
Задания по геометрии достаточно традиционны. Большая часть заданий этого типа являются несложными, однако объем теоретического материала, которым надо владеть, достаточно обширен. Определения, теоремы и формулы следует выучить и постоянно повторять, проверяя себя.

Найдите (в см^2) площадь S закрашенной фигуры, изображенной на клетчатой бумаге с размером клетки $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ (см. рис.).

В ответе запишите $\frac{S}{\pi}$.



На клетчатой бумаге изображены два круга. Площадь внутреннего круга равна 9. Найдите площадь заштрихованной фигуры.



- Квартира состоит из комнаты, кухни, коридора и санузла (см. чертёж). Комната имеет размеры $5\text{ м} \times 3,5\text{ м}$, коридор — $1,5\text{ м} \times 6,5\text{ м}$, длина кухни $3,5\text{ м}$. Найдите площадь санузла (в квадратных метрах).



Задание 4 (профиль)

Задание 10 (база)

**Проверяемые
требования
(умения)/тип задач**

Уметь строить и исследовать простейшие математические модели.
Теория вероятностей и статистика.

Типичные ошибки

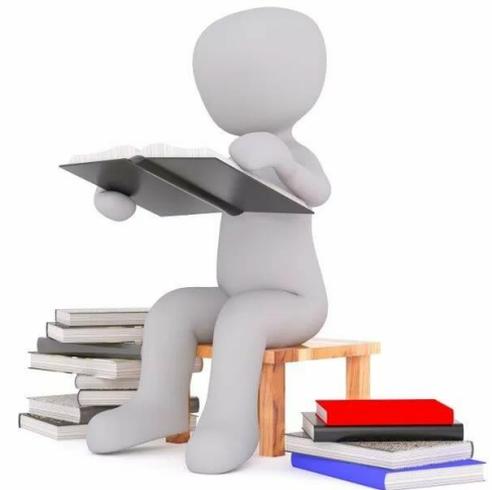
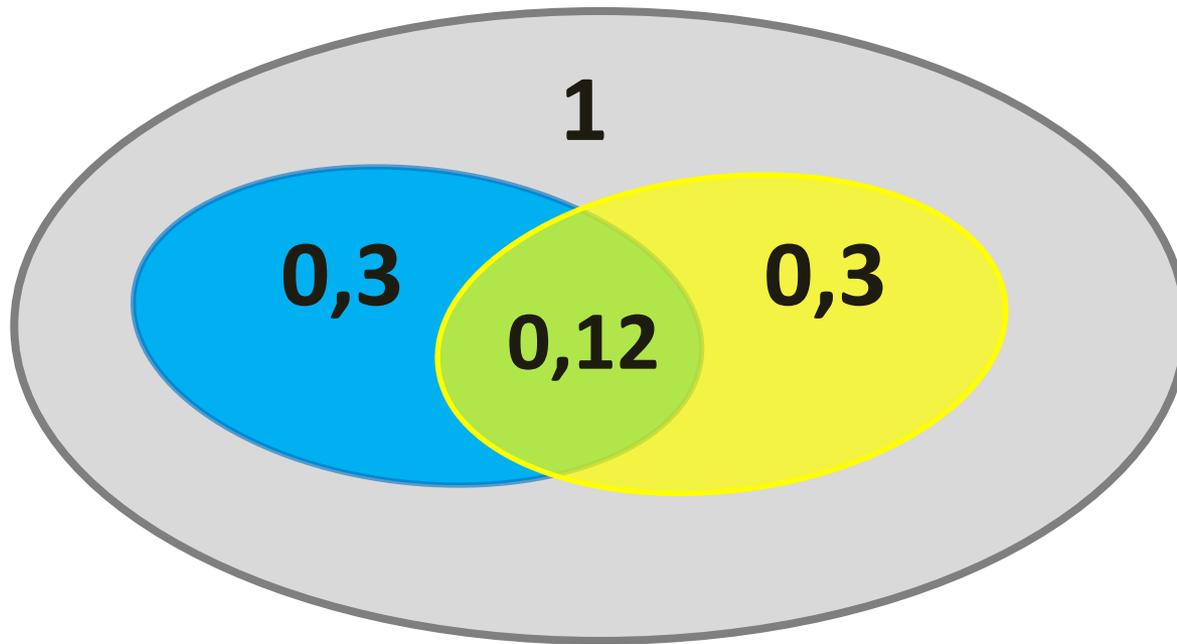
Типичные ошибки связаны с тем, что большое количество участников экзамена неверно ставят математическую модель

**Рекомендации по
выполнению
задания 4**

Большая часть заданий этого типа сводятся к использованию формулы $P(A)=m/n$. Ответом к задачам с кратким ответом могут быть только целые числа или конечные десятичные дроби, поэтому полученную обыкновенную дробь необходимо переводить в десятичную. Во избежание ошибок следует различать два типа условий. В условиях вида «из 100 сумок 8 дефектных» имеется в виду, что всего сумок 100, из них дефектных — 8, качественных — 92. В условиях вида «на каждые 100 сумок приходится 8 дефектных» предполагается, что всего сумок 108, из них дефектных — 8, качественных — 100.

При решении заданий с использованием теорем о вероятностях событий важно хорошо знать определения и теоремы и не путаться в них. Вычислительной сложности задания, как правило, не представляют.

В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,12. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.



Задание 5 (профиль)

Задание 7 (база)

**Проверяемые
требования
(умения)/тип задач**

Уметь решать уравнения и неравенства.
Простейшие уравнения.

Типичные ошибки

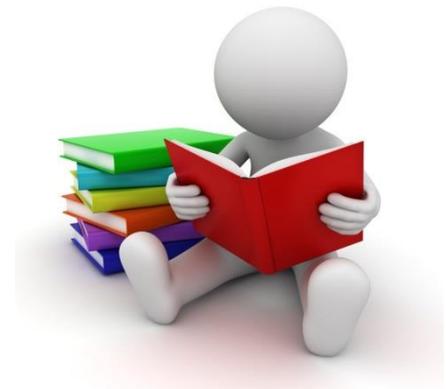
Это стандартные уравнения базовой части. Основные ошибки, допущенные участниками, – при выполнении действий с отрицательным показателем степени и при решении линейного уравнения.

**Рекомендации по
выполнению
задания 5**

Надо знать: линейные уравнения, квадратные уравнения, рациональные уравнения, иррациональные уравнения, показательные уравнения, логарифмические уравнения. При решении многих задач ЕГЭ необходимо установить связь между различными основаниями степени, поэтому будет полезно знать некоторые степени чисел в пределах 1000.

Перед записью ответа необходимо выполнить проверку корней и внимательно прочитать вопрос.

- 1 Решите уравнение $\frac{x+8}{5x+7} = \frac{x+8}{7x+5}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.
- 2 Найдите корень уравнения $\sqrt{-72-17x} = -x$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.
- 3 Решите уравнение $2^{3+x} = 0,4 \cdot 5^{3+x}$.
- 4 Решите уравнение $\log_{x-5} 49 = 2$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.
- 5 Найдите корни уравнения $\cos \frac{\pi(x-7)}{3} = \frac{1}{2}$. В ответ запишите наибольший отрицательный корень.



Задание 6 (профиль)

Задание 15 (база)

**Проверяемые
требования
(умения)/тип задач**

Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами.

Планиметрические задачи.

Типичные ошибки

Основные ошибки, допущенные участниками, говорят о том, что заметные пробелы в геометрической подготовке сохраняются у значительной части учащихся. При выполнении этого задания также допускается много вычислительных ошибок.

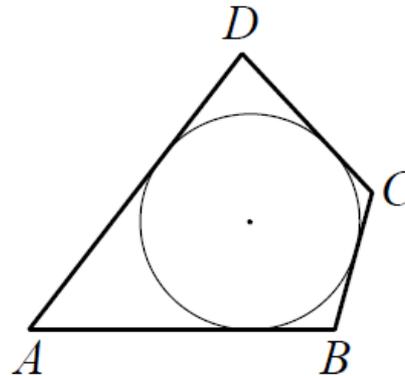
**Рекомендации по
выполнению
задания 6**

Надо знать:

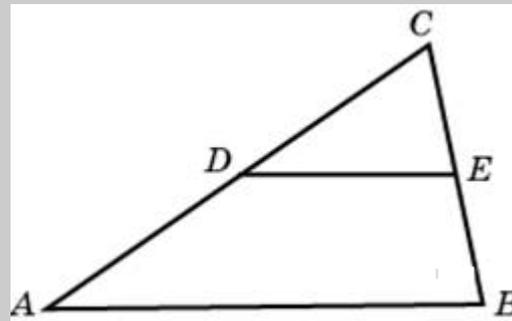
треугольники, четырехугольники, основное тригонометрическое тождество и следствия из него, тригонометрические функции дополнительных углов являются сходственными, синусы смежных углов равны, а косинусы, тангенсы и котангенсы противоположны, многоугольники, окружность, векторы и координаты.

При обучении математике следует обращать особое внимание на развитие геометрической интуиции, умения работать с чертежом, узнавать базовые геометрические конструкции.

В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB = 22$, $CD = 17$.
Найдите периметр четырёхугольника $ABCD$.



Площадь четырёхугольника $ADEB$ равна 6. DE — средняя линия. Найдите площадь треугольника CDE .



Задание 7 (профиль)

Задание 14 (база)

**Проверяемые
требования
(умения)/тип задач**

Уметь выполнять действия с функциями.
Применение производной и первообразной к исследованию функции.

Типичные ошибки

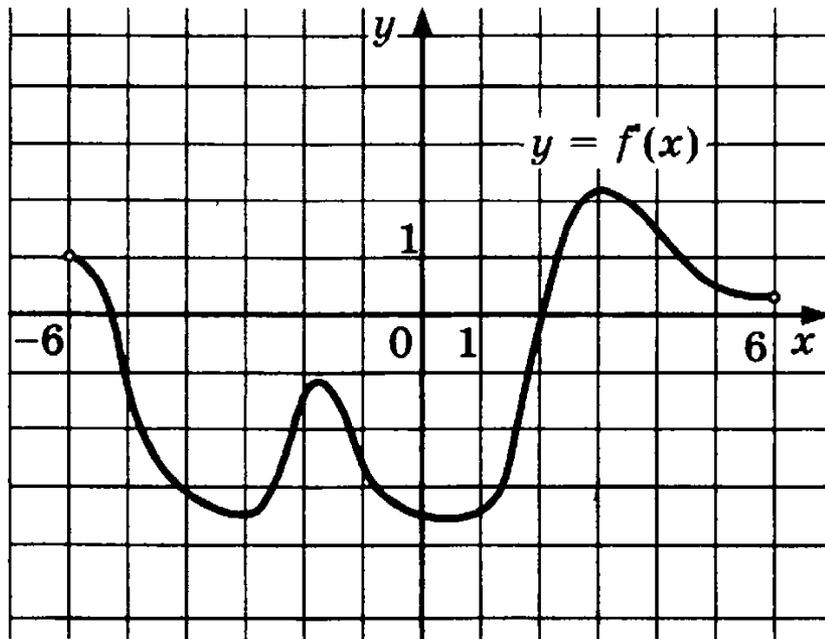
Типичные ошибки решающих состоят в том, что, анализируя график производной, они путают его с графиком самой функции. При изучении начал математического анализа следует смещать акцент с формальных вычислений на понимание базовых понятий.

**Рекомендации по
выполнению
задания 7**

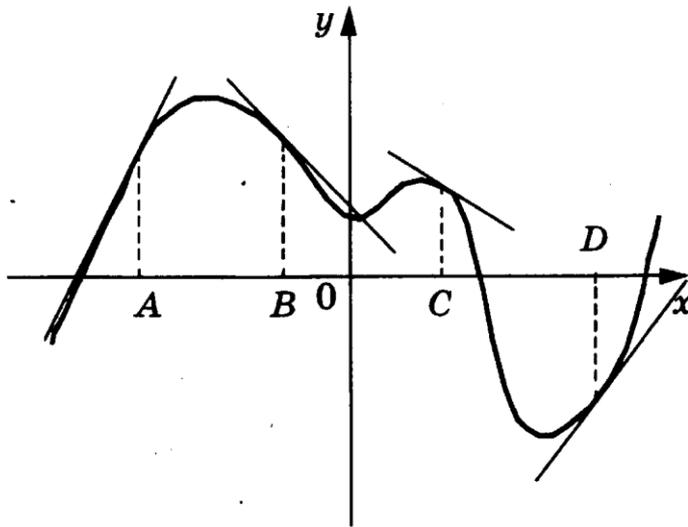
Предлагаемые задания в целом несложные, решение обычно сводится к реализации несложного алгоритма. Следует повторить таблицу производных и правила дифференцирования и обратить внимание на различия в понятиях: точка экстремума, экстремум, координаты точки экстремума, наибольшее и наименьшее значение функции. Основной корпус заданий представляет собой несложные задачи на определение поведения функции или ее производной по графику этой функции или ее производной. Важно внимательно следить за тем, график какой функции дан и про какую функцию поставлен вопрос задачи.

Надо знать: физический смысл производной, уравнение прямой, уравнение касательной, монотонность и экстремумы функции.

На рисунке изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6; 6)$. В какой точке отрезка $[-3; 3]$ $f(x)$ принимает наименьшее значение?

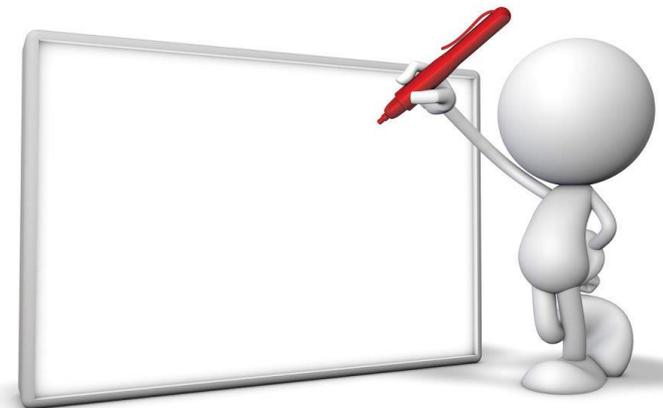


На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательные, проведённые к нему в точках с абсциссами A , B , C и D .



В правом столбце указаны значения производной функции в точках A , B , C и D . Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждой точке значение производной функции в ней.

ТОЧКИ	ЗНАЧЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ
A	1) -1
B	2) 2
C	3) 1
D	4) $-0,5$



Задание 8 (профиль)**Задание 13, 16 (база)**

Проверяемые требования (умения)/тип задач Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами.
Стереометрические задачи.

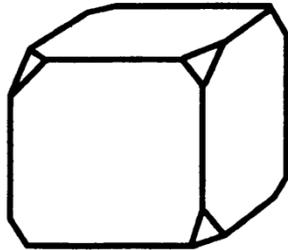
Типичные ошибки Данное задание является стандартной задачей по стереометрии.
Типичные ошибки:
- невнимательное прочтение условия задачи;
- незнание формул.

Рекомендации по выполнению задания 8

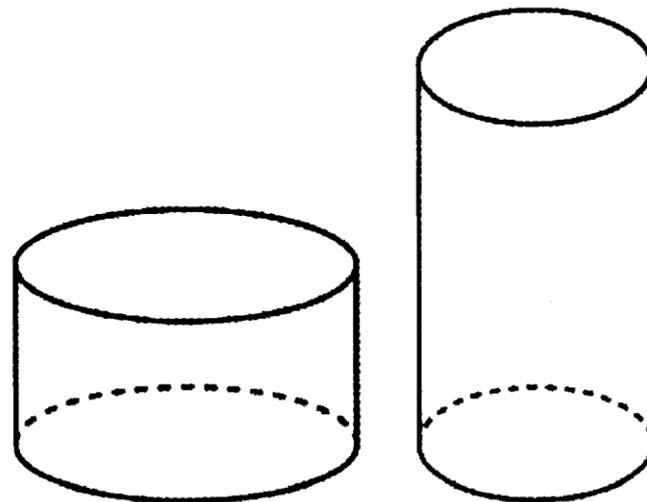
Задания этого вида представляют собой стереометрические задания на установление взаимосвязи между основными элементами многогранников и круглых тел, а также на использование формул для вычисления их площадей поверхностей и объемов. Вычислительной трудности задания не представляют; решение, как правило, сводится к использованию одной-двух формул. Соответствующие формулы нужно знать наизусть.

Задание важное, показательное, так как оно проверяет сформированность пространственных представлений. В преподавании геометрии очень важным является не только умение решать вычислительные задачи с геометрическим содержанием (по формулам), но и формировать геометрические представления о фигурах (телах).

От деревянного кубика отпилили все его вершины (см. рис.). Сколько граней у получившегося многогранника (невидимые рёбра на рисунке не изображены)?



Дано два цилиндра. Объём первого цилиндра равен 70. У второго цилиндра высота в 3 раза больше, а радиус основания в 2 раза меньше, чем у первого. Найдите объём второго цилиндра.



Задание 9 (профиль)

Задание 5 (база)

**Проверяемые
требования
(умения)/тип задач**

Уметь выполнять вычисления и преобразования.
Тождественные преобразования выражений.

Типичные ошибки

Типичные ошибки: невнимательное прочтение условия задачи; незнание формул.

При решении многих задач ЕГЭ необходимо установить связь между различными основаниями степени, поэтому будет полезно знать некоторые степени чисел в пределах 1000.

Большая часть экзаменационных заданий - это задания на вычисление логарифмов и на преобразования логарифмических выражений; задания на преобразования буквенных логарифмических выражений представлены всего тремя прототипами. При подготовке следует обратить особое внимание на формулу перехода к новому основанию логарифма и следствия из нее: задачи на использование этих формул в школьных учебниках практически не встречаются.

Большая часть заданий по тригонометрии представляет собой задачи на вычисление значений числовых тригонометрических выражений с применением формул двойных углов и формул приведения.

Надо знать: формулы сокращенного умножения, степень, степень с дробным показателем, свойства степени, арифметический корень, свойства арифметического корня, определение логарифма, свойства логарифма, основные тригонометрические формулы, свойства четности и нечетности функции.

**Рекомендации по
выполнению
задания 9**

№

Найдите значение выражения

$$1 \quad x + \sqrt{x^2 - 24x + 144} \quad \text{при} \quad x \leq 12$$

$$2 \quad \sqrt{(a-6)^2} + \sqrt{(a-10)^2} \quad \text{при} \quad 6 \leq a \leq 10$$

$$3 \quad \frac{p(b)}{p(\frac{1}{b})}, \quad \text{если} \quad p(b) = \left(b - \frac{9}{b}\right) \left(-9b + \frac{1}{b}\right) \\ \text{при} \quad b \neq 0$$

$$4 \quad \frac{a^{-1}b^{-5}}{(2a)^2b^{-2}} \cdot \frac{3}{a^{-3}b^{-3}}$$



Задание 10 (профиль)

**Проверяемые
требования
(умения)/тип задач**

Уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни.

Задачи с прикладным содержанием.

Типичные ошибки

Наибольшая трудность в заданиях такого типа – чтение, понимание условия, применение математических знаний.

Любая из задач указанного типа может быть сведена либо к уравнению, либо к неравенству.

Решать уравнение, как правило, проще, чем неравенство, но интерпретация полученного решения иногда может быть затруднительна. Предлагается решать задачи двумя способами, вне зависимости от того, какой именно более эффективен в данной конкретной задаче.

**Рекомендации по
выполнению
задания 10**

Задания с прикладным содержанием, представляют собой задачи на анализ явления, описываемого формулой функциональной зависимости. Каждая из фабул представляет собой описание того или иного явления с указанием формулы, которой оно описывается, параметров и констант в этой формуле и необходимых единиц измерения. В задачах с физическим содержанием все единицы измерения приведены в единой используемой в задаче системе единиц (СИ или СГС), перевод единиц измерения из одной системы в другую не требуется.

1 После дождя уровень воды в колодце может повыситься. Мальчик измеряет время t падения небольших камешков в колодец и рассчитывает расстояние до воды по формуле $h = 5t^2$, где h – расстояние в метрах, t – время падения в секундах. До дождя время падения камешков составляло 0,6 с. На сколько должен подняться уровень воды после дождя, чтобы измеряемое время изменилось на 0,2 с? Ответ выразите в метрах.

2 Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с главным фокусным расстоянием $f = 30$ см. Расстояние d_1 от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 30 до 50 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана – в пределах от 150 до 180 см. Изображение на экране будет четким, если выполнено соотношение $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}$. Укажите, на каком наименьшем расстоянии от линзы можно поместить лампочку, чтобы её изображение на экране было чётким. Ответ выразите в сантиметрах.

3 В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 – начальная масса изотопа, t – время, прошедшее от начального момента, T – период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа 40 мг. Период его полураспада составляет 10 мин. Найдите, через сколько минут масса изотопа будет равна 5 мг.



Задание 11 (профиль)

**Проверяемые
требования
(умения)/тип задач**

Уметь строить и исследовать простейшие математические модели.
Текстовые задачи.

Типичные ошибки

Текстовые задачи на составление дробно-рационального уравнения входят в любой текст экзаменационной работы. Наибольшая трудность в чтение, понимание условия, применение математических знаний.

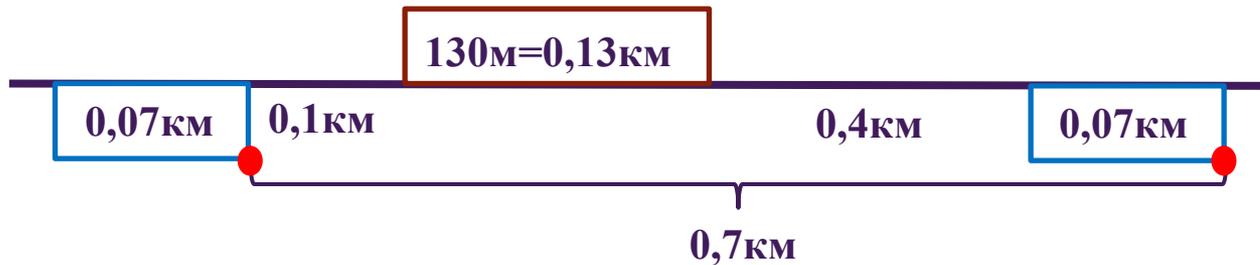
Абсолютное большинство задач решается составлением рационального уравнения, сводимого к квадратному. Некоторые задания допускают не только алгебраическое решение, связанное с составлением уравнения, но и арифметическое, без использования переменных.

**Рекомендации по
выполнению
задания 11**

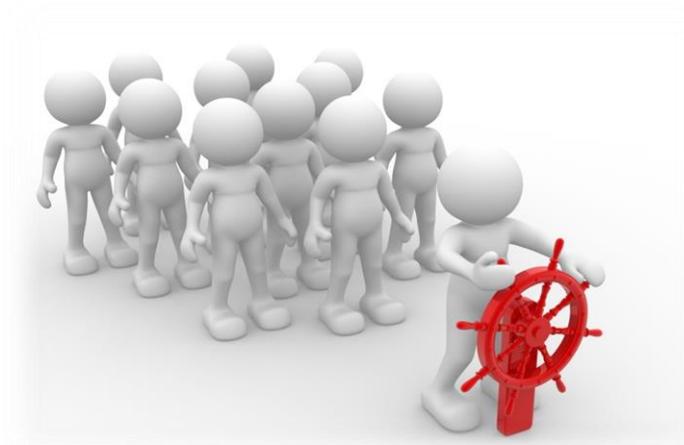
Надо знать: движение по прямой, движение по окружности, процент от числа.

Данная задача представляет интерес в свете анализа результатов, поскольку является стандартной задачей на составление уравнений курса алгебры 8-го класса. На протяжении ряда лет доля участников ЕГЭ, верно решающих такие задачи, практически неизменна и чуть выше доли тех, кто решает эти задачи в 8 или 9 классе.

По морю параллельными курсами в одном направлении следуют два сухогруза: первый длиной 130 метров, второй — длиной 70 метров. Сначала второй сухогруз отстает от первого, и в некоторый момент времени расстояние от кормы первого сухогруза до носа второго составляет 100 метров. Через 14 минут после этого уже первый сухогруз отстает от второго так, что расстояние от кормы второго сухогруза до носа первого равно 400 метрам. На сколько километров в час скорость первого сухогруза меньше скорости второго?



$$S = 0,7 \text{ км}; \quad t = 14 \text{ мин} = \frac{14}{60} \text{ ч} = \frac{7}{30} \text{ ч}; \quad \Delta v = \frac{S}{t} = 0,7 : \frac{7}{30} = 3 \text{ км/ч}$$



Задание 12

**Проверяемые
требования
(умения)/тип задач**

Уметь выполнять действия с функциями.
Исследование функций при помощи производной.

Типичные ошибки

По сложности выполнения это задание сопоставимо с заданиями с развернутым ответом.

Наиболее распространенные ошибки – в нахождении производной. У части участников невнимательное прочтение условия задачи приводит к потере балла.

Надо знать: производные некоторых элементарных функций, правила дифференцирования, монотонность и экстремумы функции, наибольшее и наименьшее значение функции.

**Рекомендации по
выполнению
задания 12**

Тематика экзаменационных задач полностью соответствует школьным учебникам. Предлагаемые задания в целом несложные, решение обычно сводится к реализации несложного алгоритма.

Среди экзаменационных заданий на нахождение наибольших и наименьших значений, встречаются такие функции, исследование которых при помощи производных труднее, чем элементарный анализ.

- 1 Найдите наименьшее значение функции $y = (x-8)e^{x-7}$ на отрезке $[6; 8]$.
- 2 Найдите наибольшее значение функции $y = 8\ln(x+7) - 8x + 3$ на отрезке $[-6,5; 0]$.
- 3 Найдите наибольшее значение функции $y = 15x - 3\sin x + 5$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.
- 4 Найдите наибольшее значение функции $y = 3^{-7-6x-x^2}$.



Задание 1, 2 (база)

Найдите значение выражения $(5,3 - 2,8) \cdot 38$.

Найдите значение выражения $\frac{2}{5} - 0,52 \cdot \frac{5}{26}$.

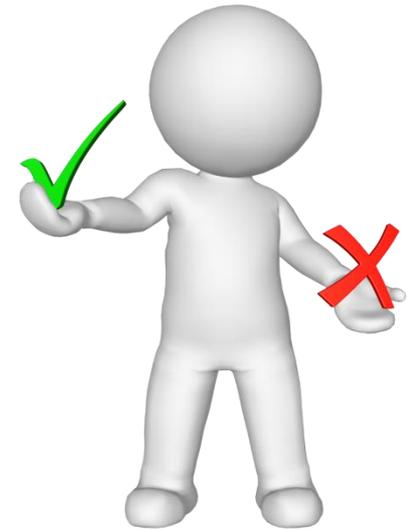
Найдите значение выражения $\frac{2,7}{1,4 + 0,1}$.

Найдите значение выражения $\frac{2,1}{6,6 - 2,4}$.

Найдите значение выражения $3,21 : 0,3 + 2,42$.

Найдите значение выражения $0,21 : \frac{3}{8} + \frac{11}{25}$.

Найдите значение выражения $5,6 \cdot 2,5 : 0,7$.



Найдите значение выражения $\frac{9^{-6} \cdot 9^4}{9^{-3}}$.

Найдите значение выражения $7 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^{-1}$.

Найдите значение выражения $\frac{1,8 \cdot 10^2}{6 \cdot 10^{-1}}$.

Найдите значение выражения $\frac{2^7 \cdot 3^6}{6^5}$.

Задание 4 (база)

- Площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда с рёбрами, a и c можно найти по формуле $S = 2(ab + ac + bc)$. Найдите площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда с рёбрами 1, 3 и 7.
- Площадь треугольника со сторонами a , b , c можно найти по формуле Герона $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = \frac{a+b+c}{2}$. Найдите площадь треугольника со сторонами 11, 25, 30.
- Если p_1 , p_2 и p_3 — различные простые числа, то сумма всех делителей числа $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$ равна $(p_1+1)(p_1+2)(p_1+3)$. Найдите сумму делителей числа $130 = 2 \cdot 5 \cdot 13$.



Задание 9 (база)

Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ

- А) высота вагона
- Б) рост восьмилетнего ребёнка
- В) высота Троицкой башни Кремля
- Г) длина реки Москва

ЗНАЧЕНИЯ

- 1) 134 см
- 2) 79,3 м
- 3) 370 см
- 4) 502 км



Задание 12 (база)

Телефонная компания предоставляет на выбор три тарифных плана.

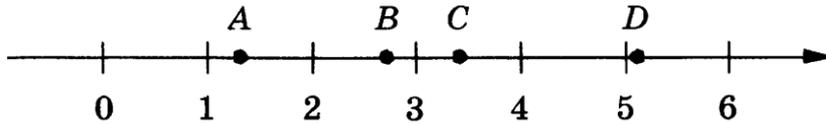
Тарифный план	Абонентская плата	Плата за трафик
«Повременный»	Нет	1 руб.
«Комбинированный»	160 руб. за 300 мин.	1,5 руб. (сверх 300 мин. в месяц)
«Безлимитный»	499 руб.	Нет

Абонент предполагает, что общая длительность разговоров составит 500 минут в месяц, и исходя из этого выбирает наиболее дешёвый тарифный план. Сколько рублей должен будет заплатить абонент за месяц, если общая длительность разговоров действительно будет равна 500 минутам?



Задание 17 (база)

На координатной прямой отмечены точки A , B , C и D .



Число m равно $\sqrt{3}$.

Каждой точке соответствует одно из чисел в правом столбце. Установите соответствие между указанными точками и числами.

ТОЧКИ

A
 B
 C
 D

ЧИСЛА

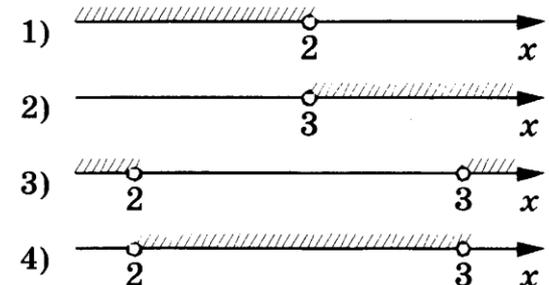
1) $m + 1$
2) m^3
3) \sqrt{m}
4) $\frac{6}{m}$

➤ Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА

- А) $\frac{1}{(x-2)(x-3)} > 0$
 Б) $3^{-x+3} > 3$
 В) $\log_3 x > 1$
 Г) $\frac{x-3}{x-2} < 0$

РЕШЕНИЯ



Задание 18 (база)

Повар испёк 50 рогаликов, из них 15 рогаликов он посыпал корицей, а 20 рогаликов посыпал сахаром. Выберите утверждения, которые верны при указанных условиях.

- 1) Найдётся 10 рогаликов, которые ничем не посыпаны.
- 2) Если рогалик посыпан сахаром, то он посыпан и корицей.
- 3) Не может оказаться больше 20 рогаликов, посыпанных и сахаром, и корицей.
- 4) Найдётся 20 рогаликов, посыпанных и сахаром, и корицей.



При взвешивании животных в зоопарке выяснилось, что буйвол тяжелее льва, медведь легче буйвола, а рысь легче льва. Выберите утверждения, которые верны при указанных условиях.

- 1) Рысь тяжелее буйвола.
- 2) Буйвол самый тяжёлый из всех этих животных.
- 3) Медведь тяжелее буйвола.
- 4) Рысь легче буйвола.

Задание 19 (база)

- Вычеркните в числе 86957205 три цифры так, чтобы получившееся число делилось на 60. В ответе укажите ровно одно получившееся число.
- Найдите трёхзначное натуральное число, большее 600, которое при делении и на 3, и на 4, и на 5 даёт в остатке 1 и цифры в записи которого расположены в порядке убывания слева направо. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.



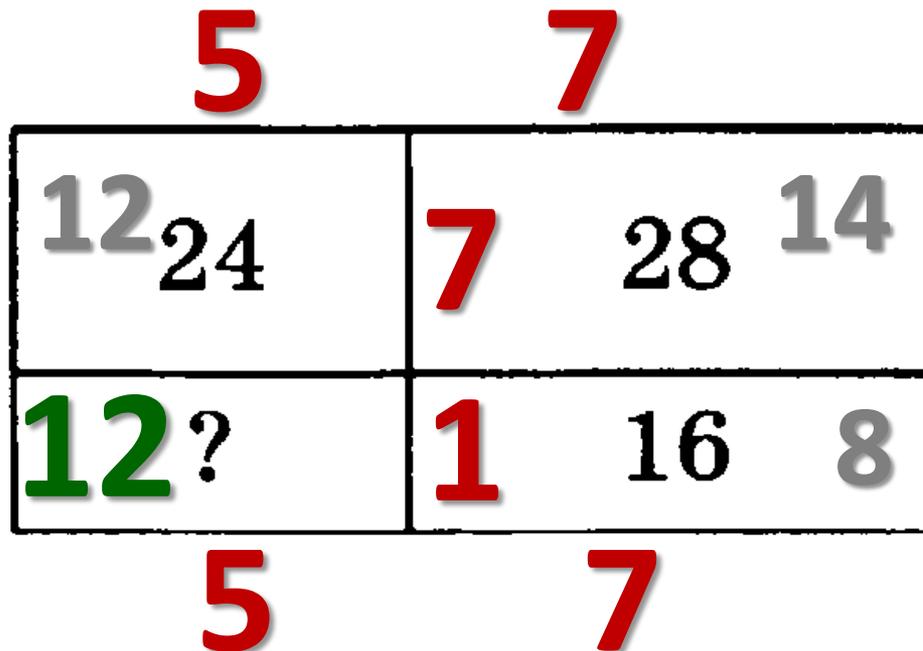
Задание 20 (база)

Прямоугольник разбит на четыре меньших прямоугольника двумя прямолинейными разрезами. Периметры трёх из них, начиная с левого верхнего и далее по часовой стрелке, равны 24, 28 и 16. Найдите периметр четвёртого прямоугольника.

24	28
?	16

Задание 20 (база)

Прямоугольник разбит на четыре меньших прямоугольника двумя прямолинейными разрезами. Периметры трёх из них, начиная с левого верхнего и далее по часовой стрелке, равны 24, 28 и 16. Найдите периметр четвёртого прямоугольника.



Задания 13

13. а) Решите уравнение $2 \cos x - \sqrt{3} \sin^2 x = 2 \cos^3 x$

б) Найдите корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$

13. а) Решите уравнение

$$\sqrt{x^3 - 4x^2 - 10x + 29} = 3 - x.$$

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-\sqrt{3}; \sqrt{30}]$.

13. а) Решите уравнение $\frac{\sin x}{\cos^2 \frac{x}{2}} = 4 \sin^2 \frac{x}{2}$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов – пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0



Вычислительная ошибка – ошибка, допущенная при выполнении арифметических действий: сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень (натуральный показатель), извлечение корня

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов – пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0



Запись ответа в работе участника экзамена может отличаться от приведенной в критериях (содержать один целочисленный параметр n или несколько k, m, n). Важно, чтобы в ответе были приведены все ответы для пункта a .

Методы отбора корней тригонометрических уравнений

При решения тригонометрических уравнений в случаях отбора корней обычно используют один из следующих методов:

- арифметический;
- алгебраический;
- геометрический (на тригонометрической окружности или числовой прямой);
- функционально-графический.

Арифметический способ:

- а) непосредственная подстановка полученных корней в уравнение и имеющиеся ограничения;
- б) перебор значений целочисленного параметра и вычисление корней.

Алгебраический метод:

- а) решение неравенства относительно целочисленного параметра и вычисление корней;
- б) исследование уравнения с двумя целочисленными параметрами.

Геометрический способ:

- а) изображение корней на тригонометрической окружности и их отбор с учетом имеющихся ограничений;
- б) изображение корней на числовой прямой с последующим отбором и учетом имеющихся ограничений.

Функционально-графический метод:

отбор корней с использованием графиков простейших тригонометрических функций.

При этом подходе требуется умение схематичного построения графика тригонометрической функции и применение формул корней соответствующих уравнений.

Рекомендации по оформлению решения задания 13

Задание содержит два пункта:

- а) решить уравнение,
- б) отобразить его корни на данном промежутке.

Соответственно в ответе должно быть две части:

- а) все корни уравнения (в случае тригонометрического уравнения, не забудьте написать $n \in \mathbb{Z}$),
- б) отобранные на данном промежутке корни.

Решение уравнения лучше никак не комментировать и не писать знаков равносильности, так как часто при верном решении выпускники ошибаются в комментариях и ставят проверяющих в тупик.

Отбор корней, можно проводить разными способами, но, при решении тригонометрического уравнения, рекомендуется его провести на окружности. При этом в начале отбора стоит написать фразу: ***отберем корни с помощью единичной окружности*** и затем на окружности обязательно все обозначить: точки – концы промежутка (в данном случае дуги), сами корни и жирным выделить саму дугу. Этот рисунок рисуется не для себя, а для проверяющего, на нем все должно быть видно.

$$\sqrt{2} \quad 2 \log_4^2(4 \sin x) - 5 \log_4(4 \sin x) + 2 = 0$$

$$2t^2 - 5t + 2 = 0 \quad D = 25 - 16 = 9$$

$$\log_4(4 \sin x) = t \quad \begin{matrix} 0 \neq 3 \\ 4 \sin x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \\ x \neq \pi k \end{matrix} \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} \log_4(4 \sin x) = 2 \\ \log_4(4 \sin x) = \frac{1}{2} \end{cases} \begin{cases} 8 = 4 \sin x \\ 2 = 4 \sin x \end{cases} \begin{cases} \sin x = 2 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

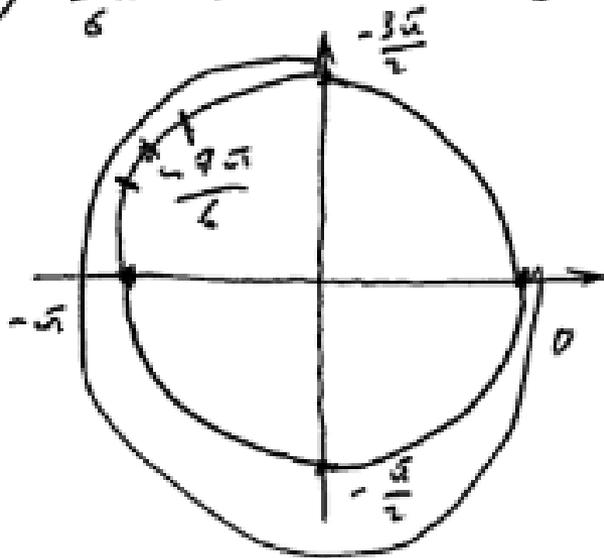
$$t_1 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$$

$$t_2 = \frac{5+3}{4} = 2$$

не подходит т.к. $-1 \leq \sin x \leq 1$

$$x = \frac{\sqrt{t}}{6} + 2\pi n; \quad \frac{5\sqrt{t}}{6} + 2\pi n \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\left[-\frac{3\sqrt{5}}{2}; 0\right]$$



Объём: а) $x = \frac{\sqrt{t}}{6} + 2\pi n; \quad \frac{5\sqrt{t}}{6} + 2\pi n$

б) $x \in \left[-\frac{3\sqrt{5}}{2}; 0\right] \quad n \in \mathbb{Z}$

$$\sqrt{2} \log_4^2(4 \sin x) - 5 \log_4(4 \sin x) + 2 = 0$$

$$2t^2 - 5t + 2 = 0 \quad D = 25 - 16 = 9$$

$$\log_4(4 \sin x) = t \quad \begin{matrix} 0 \leq t \leq 3 \\ 4 \sin x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \\ x \neq \pi k \end{matrix} \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} \log_4(4 \sin x) = 2 \\ \log_4(4 \sin x) = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} 8 = 4 \sin x \\ 2 = 4 \sin x \end{cases} \quad \begin{cases} \sin x = 2 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

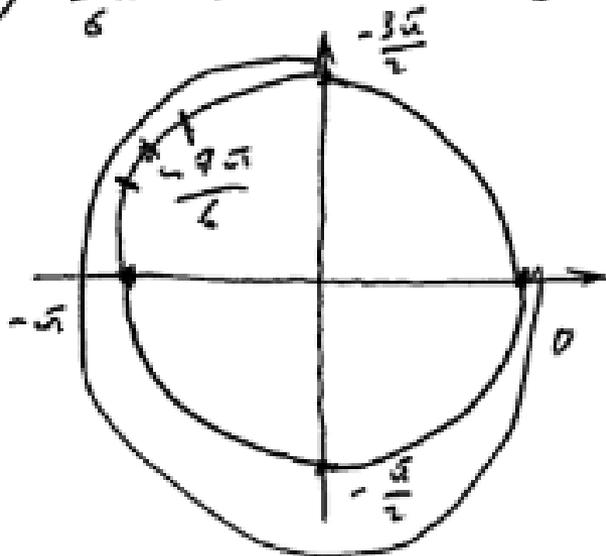
$$t_1 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$$

$$t_2 = \frac{5+3}{4} = 2$$

не подходит т.к. $-1 \leq \sin x \leq 1$

$$x = \frac{\sqrt{t}}{6} + 2\pi k; \quad \frac{5\sqrt{t}}{6} + 2\pi k \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\left[-\frac{3\sqrt{5}}{2}; 0\right]$$



0 баллов

Общ: а) $x = \frac{\sqrt{t}}{6} + 2\pi k; \quad \frac{5\sqrt{t}}{6} + 2\pi k$

б) $x \in \left[-\frac{3\sqrt{5}}{2}; 0\right] \quad n \in \mathbb{Z}$

Задания 14

- 14** В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно $2\sqrt{3}$. На рёбрах BC и $C_1 D_1$ отмечены точки K и L соответственно, причём $BK = C_1 L = 2$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L .
- Докажите, что прямая $A_1 C$ перпендикулярна плоскости γ .
 - Найдите объём пирамиды, вершина которой — точка A_1 , а основание — сечение данной призмы плоскостью γ .

- 14** Основанием четырёхугольной пирамиды $PABCD$ является трапеция $ABCD$, причём $\angle BAD + \angle ADC = 90^\circ$. Плоскости PAB и PCD перпендикулярны плоскости основания, K — точка пересечения прямых AB и CD .
- Докажите, что плоскости PAB и PCD перпендикулярны.
 - Найдите объём пирамиды $KBCP$, если $AB = BC = CD = 4$, а высота пирамиды $PABCD$ равна 9.

- 14** В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A и B , а на окружности другого основания — точки B_1 и C_1 , причём BB_1 — образующая цилиндра, а отрезок AC_1 пересекает ось цилиндра.
- Докажите, что угол ABC_1 прямой.
 - Найдите угол между прямыми BB_1 и AC_1 , если $AB = 6$, $BB_1 = 15$, $B_1 C_1 = 8$.

14

Содержание критерия**Баллы**Обоснованно получены верные ответы в пунктах *a* и *б*

2

Выполнен только один из пунктов *a* и *б*

1

Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше

0

Максимальный балл

2

Присутствие ответа, совпадающего с приведенным в критериях, еще не является достаточным условием выставления полного балла, а ответа, отличающегося от приведенного в критериях, – для выставления нулевой оценки.



Типичные ошибки при решении задания 14

Типичные ошибки участников экзамена связаны в первую очередь с неверным пониманием логики построения доказательства.

Например, доказательство пункта а задания 14 часто начинается так: *«Предположим, что треугольник прямоугольный, тогда ...»* – в случае, когда нужно доказать, что треугольник прямоугольный;
«Пусть прямые параллельны...» – в случае, когда нужно доказать параллельность прямых. И т. д.

Многие участники экзамена неверно применяют признаки: перпендикулярности прямой и плоскости, параллельности плоскостей и т. д., демонстрируют непонимание взаимосвязи элементов геометрической конструкции.

При выполнении второго пункта участники:

- допускают ошибки в геометрических формулах (например, в формулах для вычисления объемов);
- не считают нужным доказывать неочевидные геометрические утверждения, используемые в решение.

Кроме этого участники экзамена допускают большое количество ошибок при построении чертежа.

Особенности первого пункта задания 14

Возможны две ситуации в условии, описывающем геометрическую конфигурацию до формулировки пункта а.

Условие до пункта а задания:

- **не содержит числовых данных** (в этом случае свойство, которое нужно доказать в пункте а, является общим и выполняется для всех конфигураций описанных в условии);
- **содержит числовые данные** (в этом случае доказываемое свойство обычно является частным и выполняется только для приведенного в условии набора числовых данных и доказательство основывается на вычислениях, то есть сводится к проверке указанного свойства).



14

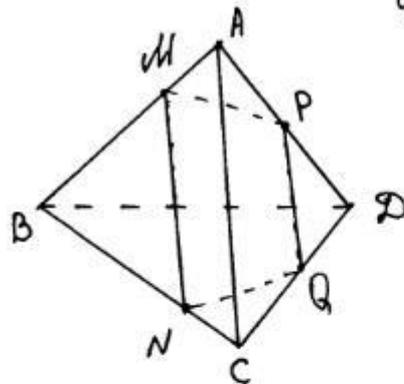
На рёбрах AB и BC треугольной пирамиды $ABCD$ отмечены точки M и N соответственно, причём $AM:MB = CN:NB = 1:2$. Точки P и Q — середины рёбер DA и DC соответственно.

Ответ: б) 13:23.

а) Докажите, что точки P, Q, M и N лежат в одной плоскости.

б) Найдите отношение объёмов многогранников, на которые плоскость PQM разбивает пирамиду.

N/4



а) 1) В $\triangle BAC$: $BM = \frac{2}{3}BA$;
 $BN = \frac{2}{3}BC$; $\angle B$ - общий \rightarrow
 $\Rightarrow \triangle BMN \sim \triangle BAC$ (по 2 сторонам и углу между ними)
 \Downarrow
 $\angle BMN = \angle BAC \Rightarrow MN \parallel AC$
 (BA - секущая)

2) В $\triangle ADC$: P - серед. AD ; Q - серед. CD $\Rightarrow PQ$ - средняя линия $\Rightarrow PQ \parallel AC$.

3) $MN \parallel AC$; $PQ \parallel AC \Rightarrow MN \parallel PQ$

т.к. 2 параллельные прямые могут лежать в 1 плоскости, то существует такая плоскость α , что

$MN \subset \alpha$; $PQ \subset \alpha \Rightarrow M \in \alpha$; $N \in \alpha$; $P \in \alpha$; $Q \in \alpha$ т.р.д.

14

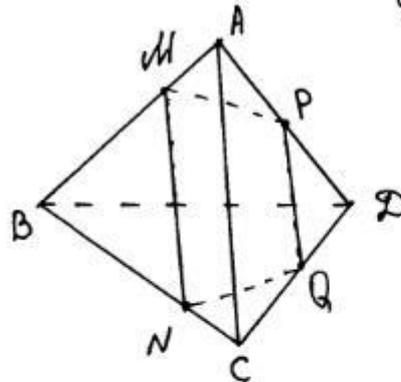
На рёбрах AB и BC треугольной пирамиды $ABCD$ отмечены точки M и N соответственно, причём $AM:MB = CN:NB = 1:2$. Точки P и Q — середины рёбер DA и DC соответственно.

Ответ: б) 13:23.

а) Докажите, что точки P, Q, M и N лежат в одной плоскости.

б) Найдите отношение объёмов многогранников, на которые плоскость PQM разбивает пирамиду.

n/4



а) 1) В $\triangle BAC$: $BM = \frac{2}{3}BA$;
 $BN = \frac{2}{3}BC$; $\angle B$ - общий \Rightarrow
 $\Rightarrow \triangle BMN \sim \triangle BAC$ (по 2 сторонам и углу между ними)
 \Downarrow
 $\angle BMN = \angle BAC \Rightarrow MN \parallel AC$
 (BA - секущая)

2) В $\triangle ADC$: P - серед. AD ; Q - серед. $CD \Rightarrow PQ$ - средняя линия $\Rightarrow PQ \parallel AC$.

3) $MN \parallel AC$; $PQ \parallel AC \Rightarrow MN \parallel PQ$

т.к. 2 параллельные прямые могут лежать в 1 плоскости, то существует такая плоскость α , что

$MN \subset \alpha$; $PQ \subset \alpha \Rightarrow M \in \alpha$; $N \in \alpha$; $P \in \alpha$; $Q \in \alpha$ т.т.д.

1 балл

Задания 15

15

Решите неравенство $\frac{6^x - 4 \cdot 3^x}{x \cdot 2^x - 5 \cdot 2^x - 4x + 20} \leq \frac{1}{x-5}$.

15

Решите неравенство $\log_2^2(25 - x^2) - 7\log_2(25 - x^2) + 12 \geq 0$.

15

Решите неравенство $(20 - 11x) \cdot \log_{5x-9}(x^2 - 4x + 5) \leq 0$.

15

Решите неравенство $2^x - 6 - \frac{9 \cdot 2^x - 37}{4^x - 7 \cdot 2^x + 12} \leq \frac{1}{2^x - 4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки x_0 (обе части неравенства при этом значении имеют смысл) ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

Запись ответа в работе участника экзамена может отличаться от приведенной в критериях (содержать знаки объединения или нет). Важно, чтобы в ответе были правильно указаны все промежутки и изолированные точки.



Основные методы решений неравенств

Часто для решения неравенств достаточно использования стандартных методов:

- метод равносильных переходов;
- метод замены;
- решение неравенства на промежутках;
- метод интервалов и обобщенный метод интервалов.

Кроме того, в ряде работ для решения неравенств можно использовать нестандартные методы:

- метод рационализации;
- метод оценки, в частности, использование классических неравенств.

Примеры на использование различных методов решения

1. $\frac{2\log_2(x+4)+1}{\log_2(x+4)-1} \geq \frac{2\log_2(30-x)+1}{\log_2(30-x)-1}$ (обобщенный метод интервалов)

2. $\log_{5-x}(x^2 - 14x + 49) \leq 2\log_{5-x}(8x - x^2 - 7) - 2$ (метод равносильных переходов).

3. $(x+1)\log_3 6 + \log_3\left(2^x - \frac{1}{6}\right) \leq x - 1$ (преобразования и замена).

4. $x \geq \log_2(101 \cdot 10^x - 10^{2+2x}) - \log_5(101 \cdot 2^x - 5^{2+x} \cdot 2^{2+2x})$ (преобраз.).

5. $\frac{9}{(\log_{2,1}(x-10))^2 \cdot \log_{1,9} x} \geq \frac{(x-1)^{\log_3(x-1)}}{9(\log_{2,1}(x-10))^2 \cdot \log_{1,9} x}$ (три способа: рационализации, по схеме "дробь \Leftrightarrow совокупности двух систем" – расщепления неравенства, обобщенный метод интервалов).

6. $\frac{\log_{\frac{1}{2}}(8x^2 + 24x - 16) + \log_2(x^4 + 6x^3 + 9x^2)}{x^2 + 3x - 10} \geq 0$ (замена и схема).



$$\frac{9^x - 2 \cdot 3^{x+1} + 4}{3^x - 5} + \frac{2 \cdot 3^{x+1} - 51}{3^x - 9} \leq 3^x + 5$$

$$\begin{aligned} 3^x - 9 > 0 \\ 3^x &= 9 \\ x &> 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3^x - 5 > 0 \\ 3^x &= 5 \\ x &> \log_3 5 \end{aligned}$$

$$\frac{3^{2x} - 2 \cdot 3^2 \cdot 3 + 4}{3^x - 5} + \frac{2 \cdot 3^2 \cdot 3 - 51}{3^x - 9} \leq 3^x + 5$$

Пусть $3^x = t$

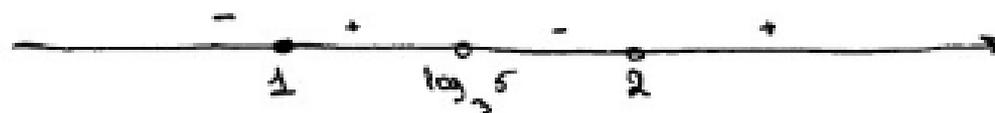
$$\frac{t^2 - 6t + 4}{t - 5} + \frac{6t - 51}{t - 9} \leq t + 5$$

$$\frac{(t^2 - 6t + 4) \cdot (t - 9) + (6t - 51)(t - 5)}{(t - 5)(t - 9)} \leq (t + 5)(t - 5)(t - 9)$$

$$\begin{aligned} t^3 - 6t^2 + 4t - 9t^2 + 54t - 36 + 6t^2 - 30t - 51t + 255 &\leq t^3 - 25t - 9t^2 + 225 \\ \cancel{t^3} - \cancel{6t^2} + 4t - \cancel{9t^2} + 54t - 36 + \cancel{6t^2} - 30t - 51t + 255 - \cancel{t^3} + 25t + \cancel{9t^2} - 225 &\leq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2t - 6 &= 0 \\ 2t &= 6 \\ t &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3^x &= 3 \\ x &= 1 \\ x &\leq 1 \end{aligned}$$



Ответ: $(-\infty; 1] \cup (\log_3 5; 2)$

$$\frac{9^x - 2 \cdot 3^{x+1} + 4}{3^x - 5} + \frac{2 \cdot 3^{x+1} - 51}{3^x - 9} \leq 3^x + 5$$

$$\frac{3^x - 9 > 0}{3^x - 9} \\ x > 2$$

$$\frac{3^x - 5 > 0}{3^x - 5} \\ x > \log_3 5$$

$$\frac{3^{2x} - 2 \cdot 3^2 \cdot 3 + 4}{3^x - 5} + \frac{2 \cdot 3^2 \cdot 3 - 51}{3^x - 9} \leq 3^x + 5$$

Пусть $3^x = t$

$$\frac{t^2 - 6t + 4}{t - 5} + \frac{6t - 51}{t - 9} \leq t + 5$$

$$\frac{(t^2 - 6t + 4) \cdot (t - 9) + (6t - 51)(t - 5)}{(t - 5)(t - 9)} \leq (t + 5)(t - 5)(t - 9)$$

$$t^3 - 6t^2 + 4t - 9t^2 + 54t - 36 + 6t^2 - 30t - 51t + 255 \leq t^3 - 25t - 9t^2 + 225$$

$$t^3 - 6t^2 + 4t - 9t^2 + 54t - 36 + 6t^2 - 30t - 51t + 255 - t^3 + 25t + 9t^2 - 225 \leq 0$$

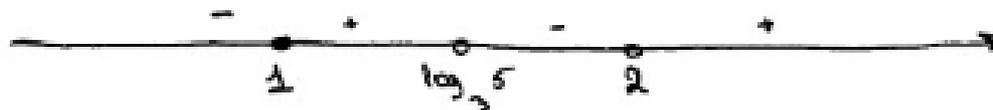
$$2t - 6 = 0$$

$$2t = 6 \\ t = 3$$

$$3^x = 3$$

$$x = 1 \\ x \leq 1$$

0 баллов



Ответ: $(-\infty; 1] \cup (\log_3 5; 2)$

Задания 16

16

В равнобедренном тупоугольном треугольнике ABC на продолжение боковой стороны BC опущена высота AH . Из точки H на сторону AB и основание AC опущены перпендикуляры HK и HM соответственно.

а) Докажите, что отрезки AM и MK равны.

б) Найдите MK , если $AB = 5$, $AC = 8$.

16

Сумма оснований трапеции равна 10, а её диагонали равны 6 и 8.

а) Докажите, что диагонали трапеции перпендикулярны.

б) Найдите высоту трапеции.

16

Окружность проходит через вершины A , B и D параллелограмма $ABCD$, пересекает сторону BC в точках B и M и пересекает продолжение стороны CD за точку D в точке N .

а) Докажите, что $AM = AN$.

б) Найдите отношение $CD : DN$, если $AB : BC = 1 : 2$, а $\cos \angle BAD = \frac{2}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , и обоснованно получен верный ответ в пункте <i>б</i>	3
Получен обоснованный ответ в пункте <i>б</i> , ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , и при обоснованном решении пункта <i>б</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , ИЛИ при обоснованном решении пункта <i>б</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте <i>б</i> с использованием утверждения пункта <i>a</i> , при этом пункт <i>a</i> не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0



Типичные ошибки в решениях задания 16

Типичные ошибки участников экзамена связаны в первую очередь с неверным пониманием логики построения доказательства.

Например, доказательство пункта *a* задания 16 часто начинается так:

– «*Пусть точка O является серединой отрезка $СК$...*» – в случае, когда нужно доказать, что точка делит отрезок пополам;

– «*Предположим, что треугольник прямоугольный, тогда ...*» –

в случае, когда нужно доказать, что треугольник прямоугольный. И т. д.

При выполнении второго пункта участники:

– допускают ошибки в геометрических формулах (например, в отношении площадей подобных фигур);

– не различают свойства и признаки геометрических фигур (признак прямоугольного треугольника, признаки и свойства ромба, и т. д.);

– не считают нужным доказывать неочевидные геометрические утверждения, используемые в решение.

Кроме этого участники экзамена допускают большое количество ошибок при построении чертежа.

Особенности первого пункта задания 16

1. В случае, если заданная конфигурация не является однозначной, должны быть рассмотрены все ее реализации и должно быть доказано, что в каждой из них выполняется указанное свойство.
2. Возможны две ситуации в условии, описывающем геометрическую конфигурацию до формулировки пункта а. Условие до пункта а задания:
 - не содержит числовых данных (в этом случае свойство, которое нужно доказать в пункте а, является общим и выполняется для всех конфигураций описанных в условии);
 - содержит числовые данные (в этом случае доказываемое свойство обычно является частным и выполняется только для приведенного в условии набора числовых данных и доказательство основывается на вычислениях, то есть сводится к проверке указанного свойства).

Особенности первого пункта задания 16

3. В большинстве заданий решение пункта а сводится к доказательству одного из следующих свойств приведенной в условии геометрической конфигурации:

- а) подобия указанных треугольников;
- б) параллельность или перпендикулярность указанных прямых;
- в) равенство указанных углов, отрезков, площадей или их заданное отношение;
- г) принадлежность указанной фигуры к определенному типу:
 - ✓ треугольник является прямоугольным, равнобедренным и т.д.;
 - ✓ четырехугольник является описанным (четыре точки лежат на одной окружности) или вписанным;
 - ✓ четырехугольник обладает признаками параллелограмма, ромба, трапеции и т.д.;
 - ✓ точка равноудалена от вершин или сторон многоугольника, то есть является центром вписанной или описанной окружностей;
 - ✓ прямая содержит указанные точку или отрезок.

Особенности второго пункта задания 16

1. Для выполнения второго пункта задачи на нахождение требуемых величин в заданной геометрической фигуре нужно помнить основные формулы для вычисления соответствующих элементов:
 - а) **для линейных** – это теоремы: *Пифагора, косинусов, синусов, о секущих и касательных, о хордах; формулы: длины медианы, биссектрисы и т.д.;*
 - б) **для угловых** – это теоремы: *косинусов, синусов, об измерении углов, связанных с окружностью (центральных, вписанных, не вписанных, между хордой и касательной) и т.д.;*
 - в) **для площадей** – это теоремы: *об отношении площадей подобных фигур и фигур, имеющих равные элементы; формулы вычисления площадей треугольника и многоугольников, круга и его частей и т.д.*
 - г) **отношений отрезков или площадей фигур** – это теоремы: *Фалеса, о пропорциональных отрезках, о метрических соотношениях в треугольнике и круге, об отношении соответствующих элементов подобных фигур и т.д.*
2. Может оказаться, что **пункт б задания 16 может быть выполнен без использования свойства, сформулированного в пункте а.**

- 16 В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основанию. Из точки A на сторону CD опустили перпендикуляр AH . На стороне AB отмечена точка E так, что прямые CD и CE перпендикулярны.
- а) Докажите, что прямые BH и ED параллельны.
 б) Найдите отношение BH к ED , если $\angle BCD = 120^\circ$.

Ответ: б) 3:4.

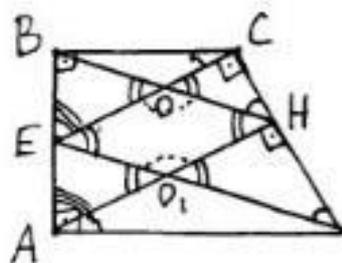
№16.

Дано:

 $ABCD$ -трапеция

 $BC \perp AB \perp AD$
 $AH \perp CD$
 $CE \perp CD$

а) Доказать:

 $BH \parallel ED$


Доказательство:

- 1) т.к. $AH \perp CD$ и $CE \perp CD$, то $AH \parallel CE$;
- 2) AB -секущая при двух \parallel прямых, значит $\angle BEC = \angle BAH$;
- 3) BH -тоже секущая, значит $\angle BOE = \angle COH = \angle BHA$;
- 4) ED -тоже секущая, значит $\angle CED = \angle EO_1A = \angle HO_1D$;
- 5) $\angle EOH = 180^\circ - \angle COH$ (смеж. углы), $\angle EO_1H = 180^\circ - \angle BHA$. т.к. $\angle COH = \angle BHA$, то $\angle EOH = \angle EO_1H$, следовательно, $EOHO_1$ -параллелограмм, а его противоположные стороны $=$ и \parallel , значит, $BH \parallel ED$.

- 16 В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основанию. Из точки A на сторону CD опустили перпендикуляр AH . На стороне AB отмечена точка E так, что прямые CD и CE перпендикулярны.
- а) Докажите, что прямые BH и ED параллельны.
 б) Найдите отношение BH к ED , если $\angle BCD = 120^\circ$.

Ответ: б) 3:4.

№16.

Дано:

$ABCD$ - трапеция

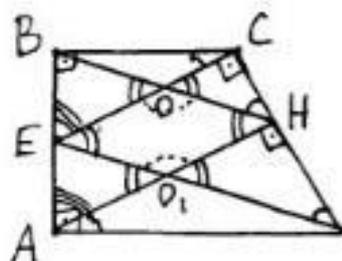
$BC \perp AB \perp AD$

$AH \perp CD$

$CE \perp CD$

а) Доказать:

$BH \parallel ED$



Доказательство:

1) т.к. $AH \perp CD$ и $CE \perp CD$, то $AH \parallel CE$;

2) AB - секущая при двух \parallel прямых, значит

$\angle BEC = \angle BAH$; 3) BH - тоже секущая, значит $\angle BOE = \angle COH = \angle BHA$;

4) ED - тоже секущая, значит $\angle CED = \angle EO_1A = \angle HO_1D$;

5) $\angle EOH = 180^\circ - \angle COH$ (смеж. углы), $\angle EO_1H = 180^\circ - \angle BHA$. т.к. $\angle COH = \angle BHA$,

то $\angle EOH = \angle EO_1H$, следовательно, $EOHO_1$ - параллелограм, а его проти-

волежущие стороны $=$ и \parallel , значит, $BH \parallel ED$.

0 баллов

Задания 17

17

15-го января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r — целое число;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн рублей)	1	0,6	0,4	0,3	0,2	0,1	0

Найдите наибольшее значение r , при котором общая сумма выплат будет

В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму.

Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Если ежегодно выплачивать по 58 564 рубля, то кредит будет полностью погашен за 4 года, а если ежегодно выплачивать по 106 064 рубля, то кредит

будет полностью погашен за 2 г 15-го декабря планируется взять кредит в банке на 21 месяц. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по 20-й долг должен быть на 30 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- к 15-му числу 21-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного его погашения составит 1604 тысячи рублей?

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели и получен результат: — неверный ответ из-за вычислительной ошибки; — верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0



Что можно ожидать в качестве задания 17 на экзамене?

Тип задания по кодификатору требований

Задание на использование приобретённых знаний и умений в практической деятельности и повседневной жизни: анализ реальных числовых данных и информации статистического характера; осуществление практических расчётов по формулам, использование оценки и прикидки при практических расчётах.

Характеристика задания

Текстовая задача на использование приобретённых знаний и умений в практической деятельности и повседневной жизни, обычно с экономическим содержанием.

Комментарий

Относительно сложная текстовая задача, связанная с банковскими кредитами, оптимизацией производства или затрат на него.

Основные ошибки, допущенные участниками экзамена:

- неверное составление модели;
- вычислительные (арифметические);
- прекращение решения на промежуточном шаге, то есть без доведения ответа до числового значения;
- **решение методом перебора без обоснования единственности;**
- использование в решении без вывода формул для задач о кредитовании, отсутствующих в учебниках (решение имеет вид «формула – ответ»), что можно трактовать как отсутствие построения модели задачи.

Ответ: 10.

В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Если ежегодно выплачивать по 58 564 рубля, то кредит будет полностью погашен за 4 года, а если ежегодно выплачивать по 106 964 рубля, то кредит будет полностью погашен за 2 года. Найдите r .

~ 17

$$X = 58564 \quad (X - \text{платеж за 4-ея лет})$$

$$y = 106964 \quad (y - \text{платеж за 2-ея лет})$$

S - сумма взятая в кредит

$$\beta = \left(1 + \frac{r}{100}\right)$$

Для 4-ея лет истинно следующее уравне,

$$(((S\beta - X)\beta - X)\beta - X)\beta - X = 0$$

$$S\beta^4 - X\beta^3 - X\beta^2 - X\beta - X = 0$$

$$S = \frac{X\beta^3 + X\beta^2 + X\beta + X}{\beta^4} = \frac{X(\beta^2 + 1)(\beta + 1)}{\beta^4}$$

Для 2-ея лет справедливо следующее уравнение

$$(S\beta - y)\beta - y = 0$$

$$S\beta^2 - y\beta - y = 0$$

$$S = \frac{y(\beta + 1)}{\beta^2}$$

П.т.к. сумма кредита одинакова ($S=S$), то

$$\frac{y(\beta + 1)}{\beta^2} = \frac{X(\beta^2 + 1)(\beta + 1)}{\beta^4}$$

$$\frac{y}{\beta^2} = \frac{X(\beta^2 + 1)}{\beta^4}$$

$$y\beta^2 = X\beta^2 + X$$

$$(y - X)\beta^2 = X, \text{ т.к. } y = 106964 \text{ и } X = 58564, \text{ то}$$

$$48400 \cdot \beta^2 = 58564$$

$$\beta^2 = \frac{58564}{48400} = \frac{4 \cdot 121 \cdot 121}{4 \cdot 121 \cdot 100} = 1,21 \Rightarrow \beta = 1,1$$

$$\Rightarrow r = 10\%$$

Ответ 10%

Ответ: 10.

В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Если ежегодно выплачивать по 58 564 рубля, то кредит будет полностью погашен за 4 года, а если ежегодно выплачивать по 106 964 рубля, то кредит будет полностью погашен за 2 года. Найдите r .

~ 17

$$X = 58564 \quad (X - \text{платеж за 4-ея лет})$$

$$y = 106964 \quad (y - \text{платеж за 2-ея лет})$$

S - сумма взятая в кредит

$$\beta = \left(1 + \frac{r}{100}\right)$$

Для 4-ея лет истинно следующее уравне,

$$(((S\beta - X)\beta - X)\beta - X)\beta - X = 0$$

$$S\beta^4 - X\beta^3 - X\beta^2 - X\beta - X = 0$$

$$S = \frac{X\beta^3 + X\beta^2 + X\beta + X}{\beta^4} = \frac{X(\beta^2 + 1)(\beta + 1)}{\beta^4}$$

Для 2-ея лет справедливо следующее уравнение

$$(S\beta - y)\beta - y = 0$$

$$S\beta^2 - y\beta - y = 0$$

$$S = \frac{y(\beta + 1)}{\beta^2}$$

П.т.к. сумма кредита одинакова ($S = S$), то

$$\frac{y(\beta + 1)}{\beta^2} = \frac{X(\beta^2 + 1)(\beta + 1)}{\beta^4}$$

$$\frac{y}{\beta^2} = \frac{X(\beta^2 + 1)}{\beta^4}$$

$$y\beta^2 = X\beta^2 + X$$

$$(y - X)\beta^2 = X, \text{ т.к. } y = 106964 \text{ и } X = 58564, \text{ то}$$

$$48400 \cdot \beta^2 = 58564$$

$$\beta^2 = \frac{58564}{48400} = \frac{4 \cdot 121 \cdot 121}{4 \cdot 121 \cdot 100} = 1,21 \Rightarrow \beta = 1,1$$

$$\Rightarrow r = 10\%$$

Ответ 10%

3 балла

Задания 18

18

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y = (a+2)x^2 + 2ax + a - 2, \\ y^2 = x^2 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

18

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \left((x+5)^2 + y^2 - a^2 \right) \cdot \ln(9 - x^2 - y^2) = 0, \\ \left((x+5)^2 + y^2 - a^2 \right) (x + y - a + 5) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

18

Найдите все значения a , при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} ax \geq 2, \\ \sqrt{x-1} > a, \\ 3x \leq 2a + 11 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение на отрезке $[3; 4]$.

Как правило критерии пишутся под определенную задачу.
Содержание может быть следующим.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все верные значения параметра, но – или в ответ включены также и одно-два неверных значения (исключено одно-два верных значения); – или решение недостаточно обосновано.	3
С помощью верных рассуждений получен верный ответ для одной возможной в задаче ситуации	2
Задача сведена к исследованию: – или взаимного расположения фигур на плоскости (прямых, окружностей и др.); – или совокупности уравнений (неравенств) с параметром	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0



Задания 19

- 19 На доске написано n чисел a_1, \dots, a_n , каждое из которых не меньше 50, но не больше 150. Каждое из чисел a_i ($1 \leq i \leq n$) уменьшили на $r_i\%$ соответственно. При этом для каждого i ($1 \leq i \leq n$) либо $r_i = 2$, либо число a_i уменьшилось на 2.
- а) Может ли среднее арифметическое чисел r_1, \dots, r_n быть равным 5?
- б) Может ли оказаться, что среднее арифметическое чисел r_1, \dots, r_n больше 2, а сумма чисел a_1, \dots, a_n уменьшилась более чем на $2n$?
- в) Известно, что на доске написано 30 чисел и их сумма уменьшилась на 40. Найдите наибольшее значение среднего арифметического чисел r_1, \dots, r_{30} .

- 19 Шесть экспертов оценивали фильм. Каждый из них выставил оценку — целое число баллов от 0 до 10 включительно. Все эксперты выставили различные оценки. Старый рейтинг фильма — это среднее арифметическое всех оценок экспертов. Новый рейтинг фильма вычисляется следующим образом: отбрасываются наименьшая и наибольшая оценки, и подсчитывается среднее арифметическое четырёх оставшихся оценок.
- а) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $\frac{1}{18}$?
- б) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $\frac{1}{12}$?
- в) Найдите наибольшее возможное значение разности старого и нового рейтингов.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: <ul style="list-style-type: none"> – пример в п. а; – обоснованное решение п. б; – искомая оценка в п. в; – пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки 	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

Комментарий Задание олимпиадного типа, рассчитанное на сильных учащихся. Для того чтобы продвинуться в его решении, не требуется никаких специальных знаний, выходящих за рамки стандарта математического образования, однако необходимо проявить определённый уровень математической культуры, логического мышления, который формируется при решении задач профильного уровня на протяжении всего обучения в школе. Ответ на первый вопрос задачи по силам большинству успевающих учеников, главное здесь — не испугаться условия, дочитать его до конца и немного подумать.



Общность всех формулировок заданий №19

Большую долю среди задач, уже использованных в вариантах экзамена, составляют задачи на последовательности (чисел, ходов, наборов чисел и т.д.)

Характерной особенностью подобных задач является исследование элементов заданной последовательности следующего вида:

- а) на наличие элемента, обладающего заданным свойством;
- б) подсчет количества элементов, обладающих заданным свойством;
- в) оценка (наибольшего или наименьшего значения) либо количества элементов, обладающих заданным свойством, либо некоторой числовой характеристики заданных элементов;
- г) приведение примера, подтверждающего полученную оценку (**подразумевается, но в условии не формулируется!**).

Основные олимпиадные идеи, используемые при решении подобных задач

- 1. Идея «чет-нечет».** Используется, когда рассматриваемая величина (например, сумма или произведение) имеет определённую чётность, что позволяет доказать невозможность ситуации, в которых она имеет другую чётность.
- 2. Уравнения в целых числах.** Используются в решении формулы (например, общего члена прогрессии, суммы n первых членов прогрессии, характеристическое свойство) в силу целочисленности входящих в них переменных приводят к необходимости исследования уравнения в целых числах.
- 3. Свойства делимости целых чисел** (признаки делимости, деление без остатка, деление с остатком, анализ остатков).
- 4. Идея «усиления неравенства»**, используемая при замене в неравенстве какой-нибудь переменной на ее возможное наибольшее или наименьшее значение.
- 5. Метод «перебора»** значений целочисленной переменной из ограниченного набора.

Классификация заданий 19 ЕГЭ, в которых присутствуют последовательности

1. Задачи на арифметическую прогрессию.
2. Задачи на геометрическую прогрессию.
3. Задачи на произвольные последовательности чисел, заданные формулой n -го члена или каким-либо ограничением, накладываемым на их элементы.
4. Задачи на последовательности наборов чисел.
5. Задачи на последовательности ходов.



Как правило, во всех подобных задачах оговаривается целочисленность элементов членов последовательностей, элементов в наборах чисел или элементов, получаемых на каждом шаге в последовательности ходов.

ИНТЕРНЕТ на службе у ЕГЭ

<http://www.fipi.ru/>

<http://obrnadzor.gov.ru/>

<http://www.stavminobr.ru/>

<http://ege.stavedu.ru/>

<http://alexlarin.net/>

<https://ege.sdangia.ru/>

УДАЧИ ВСЕМ НАМ!